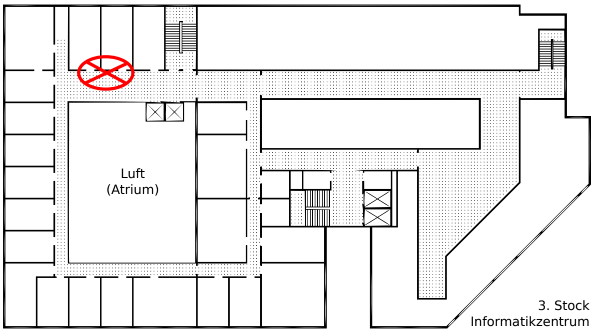
Abteilung Algorithmik **Winter 2016/2017**
Institut für Betriebssysteme und Rechnerverbund
TU Braunschweig

Dr. Christian Scheffer
Sven von Höveling

Algorithmische Geometrie
Übung 4 vom 15. 12. 2016

Abgabe der Lösungen bis zum Donnerstag, den 19. 01. 2017 um 13:15 im Hausaufgabenrückgabeschrank.

Bitte die Blätter vorne deutlich mit eigenem Namen sowie Matrikel- und Gruppennummer versehen!



Aufgabe 1: Entwirf einen Algorithmus, der in $\mathcal{O}(n \log n)$ Zeit zu einer endlichen Menge $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^2$ von Punkten ein Punktpaar mit maximalem Abstand bestimmt.

Beweise, warum Dein Algorithmus korrekt ist und die geforderte Laufzeit hat.

Hinweis: Wenn Du eine Idee für den Lösungsansatz benötigst, informiere Dich über das Stichwort *rotating calipers* (z.B. unter der URL `http://cgm.cs.mcgill.ca/~godfried/research/calipers.html`). **(5 Punkte)**

Aufgabe 2:

a) Das *set disjointness* Problem lautet:

> Entscheide zu zwei endlichen Punktmengen $A, B \subset \mathbb{R}$, $|A| = |B| = \frac{n}{2}$, ob $A \cap B = \emptyset$ gilt.

Beweise eine nicht-triviale untere Schranke dieses Problems. Argumentiere hierzu wieder über die Anzhal der Zusammenhangskomponenten der 1-Eingaben des Problems, wie wir dies bereits für das Elementeindeutigkeitsproblem in der Vorlesung getan haben.

b) Das Problem *bichromatic closest-pair* lautet:

> Es sei $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^2$ mit $|\mathcal{P}| = n$, $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$, $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 = \emptyset$ gegeben. Gesucht sind zwei Punkte $p \in \mathcal{P}_1$ und $q \in \mathcal{P}_2$ mit $d(p, q) = \min\{d(p, q) \mid p \in \mathcal{P}_1,\ q \in \mathcal{P}_2\}$.

Es handelt sich also um eine n-elementige Menge $\mathcal{P}$, die aus zwei disjunkten Teilmengen $\mathcal{P}_1$ und $\mathcal{P}_2$ besteht, wobei die Elemente jeder dieser Teilmengen gleichartig eingefärbt sind. So könnte etwa $\mathcal{P}_1$ nur blaue und $\mathcal{P}_2$ ausschließlich rote Punkte enthalten. Gesucht wäre dann das Paar von Punkten mit dem geringsten Abstand, das aus einem blauen und einem roten Punkt besteht.

Beweise eine nicht-triviale untere Schranke für dieses Problem.

(5 Punkte)

Aufgabe 3: Betrachte den folgenden Algorithmus zur Lösung des *bichromatic closest-pair* Problem ($c, c_1 > 1$ seien hierbei Konstanten):

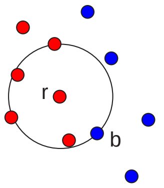
1: **if** $\min\{|S_1|, |S_2|\} \leq c$ **then**
2: Löse das Problem mit einem *brute-force* Ansatz. Gib das Paar mit minimalem Abstand zurück.
3: **end if**
4: Teile S bzgl. des Medians der x-Koordinaten in $S_{1,\text{links}}$ und $S_{1,\text{rechts}}$ bzw. $S_{2,\text{links}}$ und $S_{2,\text{rechts}}$ auf.
5: Bestimme rekursiv das *bichromatic closest-pair* in $\{S_{1,\text{links}} \cup S_{2,\text{links}}\}$.
6: Bestimme rekursiv das *bichromatic closest-pair* in $\{S_{1,\text{rechts}} \cup S_{2,\text{rechts}}\}$.
7: Bestimme das *bichromatic closest-pair* in $\{S_{1,\text{links}} \cup S_{2,\text{rechts}}\}$ und $\{S_{1,\text{rechts}} \cup S_{2,\text{links}}\}$.
8: Gib von den in den Schritten 1.–3. bestimmten Paaren das Paar mit minimalem Abstand zurück.

Zur Durchführung des Schrittes [7] soll der folgende Algorithmus verwendet werden:

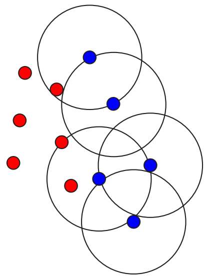
Vorbedingung: Die Mengen R und B sind durch eine vertikale Gerade getrennt und jeweils bzgl. $\leq_y$ geordnet. O.B.d.A. liege R links der trennenden Geraden.

1: **if** $\min\{|R|, |B|\} \leq c_1$ **then**
2: Löse das Problem mit einem *brute-force* Ansatz. Gib das *bichromatic closest-pair* zurück.
3: **end if**
4: O.B.d.A. gelte $|R| \geq |B|$, sonst benenne um.
5: Wähle zufällig einen Punkt $r \in R$.
6: Finde einen nächsten Nachbarn von r in $b \in B$, aktualisiere ggfs. das *bichromatic closest-pair*.
7: Konstruiere zu jedem Punkt $b' \in B$ einen Kreis mit Radius $|\overline{rb}|$ und Mittelpunkt b'.
8: Konstruiere die Vereinigung U der von $x = -\infty$ aus sichtbaren Teile dieser Kreise.
9: Sei T die Menge der Punkte aus R, die nicht rechts von U liegen (ein Punkt p liegt rechts von U, wenn das Innere des von p nach $x = -\infty$ verlaufende Halbstrahls einen Bogen in U schneidet).
10: Setze $R := R \setminus T$ und gehe zu Schritt 1.

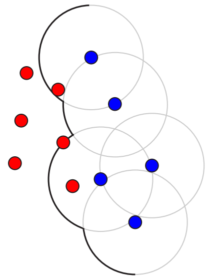
Beispiel zum Algorithmus für [7]:



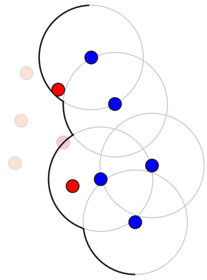
Schritt 6.



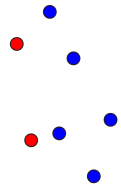
Schritt 7.



Schritt 8.



Schritt 9.



Schritt 10.

Bearbeite nun die folgenden Aufgaben (bei der Bearbeitung einer Teilaufgabe darfst Du die Ergebnisse aller vorangehenden Teilaufgaben verwenden—auch, wenn Du diese nicht bearbeitet hast):

a) Begründe, warum der Algorithmus korrekt arbeitet. Erläutere speziell, wie gewährleistet werden kann, dass die Vorbedingung immer erfüllt ist.

b) Gib einen Algorithmus mit linearer Laufzeit an, der die Menge U der Kreissegmente berechnet. *Hinweis:* Nutze aus, dass alle Kreise den gleichen Radius haben, und betrachte den Algorithmus von Graham.

c) Gib einen Algorithmus mit linearer Laufzeit an, der aus der Menge R und den Kreisbögen in U die Menge $R \setminus T$ bestimmt.

d) Gib die *worst-case* Laufzeit des Algorithmus an und begründe Deine Antwort.

e) (Herausfordernd:) Begründe, warum die Kardinalität der größeren der beiden Mengen im erwarteten Fall um einen konstanten Prozentsatz abnimmt.

f) Leite aus den vorigen Teilaufgaben die erwartete Laufzeit des gesamten Algorithmus ab.

(2+2+2+1+2+1=10 Punkte)