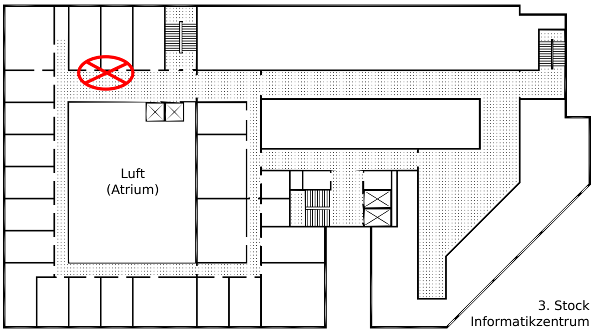
Abteilung Algorithmik **Winter 2016/2017**
Institut für Betriebssysteme und Rechnerverbund
TU Braunschweig

Dr. Christian Scheffer
Sven von Höveling

Algorithmische Geometrie
Übung 3 vom 01. 12. 2016

Abgabe der Lösungen bis zum Donnerstag, den 15. 12. 2016 um 13:15 im Hausaufgabenrückgabeschrank.



Bitte die Blätter vorne deutlich mit eigenem Namen sowie Matrikel- und Gruppennummer versehen!

Aufgabe 1: Mache Dich mit den Begriffen *diskrete Zufallsvariable* und *Erwartungswert (einer diskreten Zufallsvariablen)* vertraut und gib Definitionen für diese Begrifflichkeiten an, die auch ggfs. weitere verwendete Begrifflichkeiten definieren.

Erläutere diese Begrifflichkeiten am Beispiel des Würfelns mit einem (fairen) Würfel. **(5 Punkte)**

Aufgabe 2: Der Bisektor $B(p,q) \subset \mathbb{R}^2$ zweier Punkte p, q bzgl. der d_k-Metrik für $k \in \mathbb{N}_{\geq 1} \cup \{\infty\}$ ist definiert als die Vereinigung aller Punkte r aus $\mathbb{R}^2$, mit $d_k(p,r) = d_k(q,r)$.

a) Bestimme mathematisch und zeichne den Bisektor der beiden Punkte $(0,0), (4,0)$ bezüglich der d_1-Metrik.

b) Bestimme mathematisch und zeichne den Bisektor der beiden Punkte $(0,0), (4,0)$ bezüglich der d_∞-Metrik.

(2+3 Punkte)

Aufgabe 3: Betrachte die beiden folgenden Probleme:

- Problem *maximum gap*: Gegeben sei eine ungeordnete Menge $\mathcal{S} := \{x_0, \ldots, x_{n-1}\} \subset \mathbb{R}$. Gesucht ist der maximale Abstand zweier Werte aus $\mathcal{S}$, die bezüglich der Ordnung $\leq$ benachbart sind.
- Problem *uniform gap*: Gegeben seien eine ungeordnete Menge $\mathcal{S} := \{x_0, \ldots, x_{n-1}\} \subset \mathbb{R}$ und ein Wert $\varepsilon > 0$. Zu entscheiden ist, ob alle Abstände zweier bezüglich der Ordnung $\leq$ benachbarten Werte aus $\mathcal{S}$ gleich ε sind.

a) Beweise, *uniform gap* Problem $\rightarrow_{\Theta(n)}$ *maximum gap* Problem, d.h. gib eine lineare Reduktion des *uniform gap* Problems auf das *maximum gap* Problem an.

b) Leite eine (möglichst genaue) obere und untere Schranken für beide Probleme her. Verwende zur Herleitung einer unteren Schranke für das *uniform gap* Problem die Beweistechnik, die wir zum Beweis der unteren Schranke für das *Element-Eindeutigkeits* Problem verwendet haben.

(2+3 Punkte)

Aufgabe 4: Gegeben sei ein Feld A, das n reelle Zahlen in unsortierter Reihenfolge enthalte. Es sei $\star$ ein spezieller Wert, so dass $\min(x, \star) = \max(x, \star) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gelte. Betrachte folgendes Programmfragment eines Algorithmus:

```
for i = 1 to n do
    minX = min(minX, A[i]);
    maxX = max(maxX, A[i]);
if (maxX == minX) then
    return 0;
for i = 0 to n do
    count[i] = 0;
    low[i] = ⋆;
    high[i] = ⋆;
for i = 1 to n do
    bucket = ⌊n ∗ (A[i] − minX)/(maxX − minX)⌋;
    count[bucket] = count[bucket] + 1;
    low[bucket] = min(A[i], low[bucket]) ;
    high[bucket] = max(A[i], high[bucket]);
m = 0;
left = high[0];
for i = 1 to n do
    if (count[i] ≠ 0) then
        t = low[i] − left;
        m = max(t, m);
        left = high[i];
return m;
```

a) Erläutere das Vorgehen dieses Algorithmus umgangssprachlich. Welche Problemstellung wird durch diesen Algorithmus gelöst? Beweise Deine Aussage.

b) Bestimme die Laufzeitkomplexität des Algorithmus und begründe Dein Ergebnis. Verwende hierbei ein Berechnungsmodell, in dem jede einzelne Operation, die im oben angegeben Programmtext auftritt, in $\mathcal{O}(1)$ Zeit durchführbar ist.

c) Steht die in (b) bestimmte Laufzeitkomplexität im Widerspruch einer bereits früher bestimmten unteren Schranke? Begründe Deine Antwort.

(3+2+0 Punkte)