Abteilung Algorithmik **Winter 15**
Institut für Betriebssysteme und Rechnerverbund
TU Braunschweig

Prof. Dr. Sándor Fekete
Dr. Frank Quedenfeld

Mathematische Methoden der Algorithmik
Übung 5 vom 20.01.2016

Abgabe der Lösungen bis Dienstag, den 02.02.2016, 11:30 Uhr im Hausaufgabenrückgabeschrank in der Abteilung Algorithmik. Bitte die Blätter zusammenheften und vorne deutlich mit eigenem Namen, Matrikelnummer, sowie Studiengang versehen.

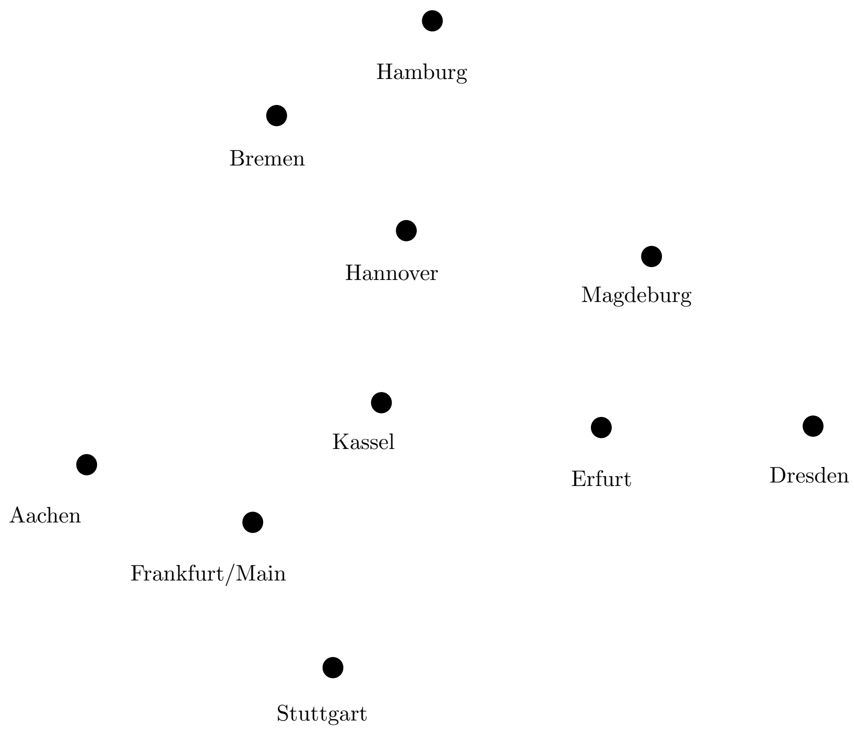


Abbildung 1: Zehn Städte in Deutschland

Aufgabe 1 (Traveling-Salesman-Problem): Zwischen je zwei dieser Städte gibt es eine direkte Straßenverbindung. Die Werte (auf Vielfache von 10 Kilometern gerundet) sind die folgenden:

		2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	Aachen	37	65	45	24	48	35	31	50	41
2	Bremen		48	35	45	11	12	28	25	65
3	Dresden			22	49	49	39	40	23	53
4	Erfurt				27	38	29	14	21	44
5	Frankfurt/Main					51	36	19	45	20
6	Hamburg						15	31	27	66
7	Hannover							24	14	53
8	Kassel								25	36
9	Magdeburg									57
10	Stuttgart									

Wir betrachten obige Instanz des Traveling Salesman Problem (TSP).
Erzeuge eine LP-Datei, die das LP (ohne Subtour-Elimination-Constraints) zur obigen Instanz des TSP Problems enthält und löse es mit CPLEX. Dannach ergeben sich drei sinnvolle Möglickeiten, um eine Subtour-Elimination-Constraint einzufügen (Welche?). Füge diese jeweils einzeln hinzu und löse das modifizierte LP erneut. Welche Lösungen ergeben sich? (Zeichnung!)
Füge nun hinreichend viele Subtour-Elimination-Constraints ein, um einen zusammenhängenden Trägergraphen zu bekommen. Findest Du damit eine Optimallösung, die eine Rundreise beschreibt? Gib eine optimale Rundreise an.

(15 · (Wert deiner Lösung)/Optimalwert P.)

Aufgabe 2 (Minimum Spanning Tree): Wir betrachten das Problem eines Minimalen aufspannenden Baums (Minimum Spanning Tree, MST) in einem ungerichteten Graphen, siehe z.B. Abbildung 2.
Gegeben sei ein zusammenhängender, ungerichteter Graph $G = (V, E, w)$ mit Knoten V, Kanten $E \subseteq V \times V$ und paarweise verschiedenen Kantengewichten $w : E \to \mathbb{R}$, $w(e_1) \neq w(e_2) \forall e_1, e_2 \in E, e_1 \neq e_2$.
Eine Auswahl Kanten $T \subseteq E$ heißt genau dann minimaler aufspannender Baum von G, wenn sie eine Menge mit dem kleinsten Gesamtgewicht $w(T) := \sum_{e \in T} w(e)$ ist, die alle Knoten $v \in V$ miteinander verbindet.

a) Formuliere das Problem als IP.

b) Formuliere die LP-Relaxierung und das duale Problem der LP-Relaxierung. Was stellt das duale Problem dar?

c) Gegeben einen MST T zu einem Graphen G, gib einen Algorithmus an, der die optimale Lösung des dualen Problems D bestimmt.

   Verwende dabei nicht die (direkte) Berechnung oder Dualisierung von LPs als Operationen!

d) Zeige: Bei einem MST T (also einer optimalen Lösung) haben P und D den gleichen Zielfunktionswert.

   Hinweis: Da P ein IP ist, kannst du **nicht** den Satz der starken Dualität anwenden!

(3+4+4+4 P.)

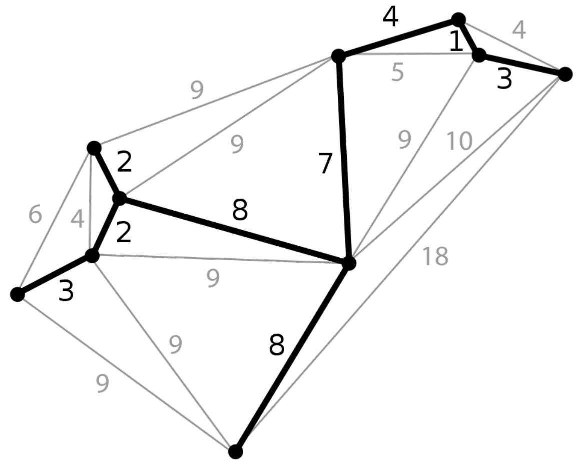


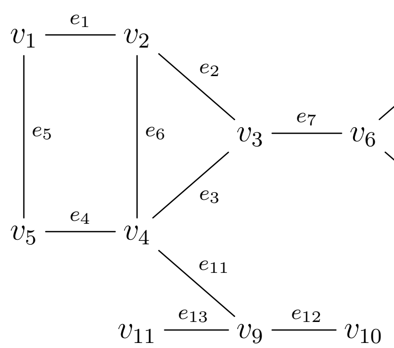
Abbildung 2: Beispiel für einen MST.

Aufgabe 3 (Fraktionales Edge Cover): Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Eine Teilmenge $E' \subseteq E$ heißt *Edge Cover* von G, wenn jeder Knoten von G zu einer Kante in E' inzident ist. Wir erlauben stattdessen eine fraktionale Auswahl und nennen eine nichtnegative Kantengewichtung $(x_e)_{e \in E}$ ein *fraktionales Edge Cover* von G, wenn jeder Knoten zu Kanten von einem Gesamtgewicht von mindestens 1 inzident ist. Siehe Aufgabenteil c) für ein Beispiel.

a) Formuliere ,,fraktionales Edge Cover mit minimalem Gesamtgewicht aller Kanten" als LP (P) für allgemeine Graphen G.

b) Dualisiere (P). Die fraktionale Variante welches Graphenproblems ist das?

c) Gegeben ist der folgende Graph ein fraktionales Edge Cover x^* mit $x^*_{e_1} = \cdots = x^*_{e_5} = \frac{1}{2}$, $x^*_{e_8} = \cdots = x^*_{e_{10}} = \frac{1}{2}$, $x^*_{e_{12}} = x^*_{e_{13}} = 1$ und $x^*_{e_6} = x^*_{e_7} = x^*_{e_{11}} = 0$. Zeige durch Konstruktion einer geeigneten dualen Lösung, dass x^* optimal ist.



(4+4+7 P.)

Aufgabe 4 (Modellierung): Modelliere die folgenden Probleme jeweils als IP. Beschreibe dabei jede Restriktion kurz mit eigenen Worten.

a) Gegeben sei ein Behälter der Größe W sowie n Objekte mit Größen w_i und Profiten p_i, $i = 1, \ldots, n$. Ziel ist es, den Behälter so zu befüllen, dass der Profit maximal ist.

b) Gegeben seien unendlich viele Behälter der Größe 1 sowie n Objekte mit Größen w_i, $i = 1, \ldots, n$. Ziel ist es, alle Objekte in möglichst wenige Behälter zu packen.

(Hinweis: Eine Menge von Objekten kann in einen Behälter gepackt werden, wenn die Summe der Größen kleiner als die Behältergröße ist.)

c) Gegeben seien m (identische) Maschinen und n Jobs, wobei der i-te Job $p_i \in \mathbb{N}$ Zeiteinheiten ($i = 1, \ldots, n$) auf einer Maschine bearbeitet werden muss. Für jeden Job gibt es außerdem eine release time, d.h. einen Zeitpunkt zu dem der Job frühestens gestartet werden darf. Ziel ist es, die Zeit zu minimieren, bis der letzte Job bearbeitet ist.

(Hinweis: Ein Job darf nur auf einer Maschine bearbeitet werden und seine Bearbeitung darf nicht unterbrochen werden. Eine Maschine darf natürlich (nacheinander) mehrere Jobs bearbeiten.)

(5+5+5 P.)