Abteilung Algorithmik **Winter 15**
Institut für Betriebssysteme und Rechnerverbund
TU Braunschweig

Prof. Dr. Sndor Fekete
Dr. Frank Quedenfeld

Mathematische Methoden der Algorithmik
Übung 1 vom 25.11.2015

Abgabe der Lösungen bis Dienstag, den 08.12.2015, 11:30 Uhr im Hausaufgabenrückgabeschrank in der Abteilung Algorithmik. Bitte die Blätter zusammenheften und vorne deutlich mit eigenem Namen, Matrikelnummer, sowie Studiengang versehen.

Aufgabe 1 (LP grafisch): Betrachte folgendes lineares Optimierungsproblem:

$$\begin{array}{rrcrcr}
\max & x_1 & + & 2x_2 & & \\
\text{unter} & -x_1 & - & x_2 & \geq & -16 \\
 & -2x_1 & - & x_2 & \geq & -34 \\
 & -x_1 & & & \geq & -10 \\
 & & & -x_2 & \geq & -10 \\
 & -x_1, & & -x_2 & \leq & 0
\end{array}$$

a) Zeichne die Menge aller zulässigen Lösungen.

b) Schreibe das Problem in Standardform (Minimiere, Gleichheitsrestriktionen, nichtnegative Variablen).

c) Zeichne die Projektionen der Basislösungen des Problems aus b) in das zweidimensionale Bild der zulässigen Lösungen. Markiere die zulässigen Basislösungen.

d) Was müsste man tun, um die Basislösungen algebraisch zu bestimmen?

e) Gibt es degenerierte Basislösungen?

f) Wie lautet die optimale Lösung des Problems?

(3+5+5+1+3+3 P.)

Aufgabe 2 (LP-Formulierung eines Optimierungsproblems): Formuliere das folgende Optimierungsproblem als LP: Gegeben n Punkte (x_i, y_i) in der Ebene. Gesucht ist eine Gerade, die das Maximum der vertikalen Abstände zu den Punkten minimiert. Dualisiere das Problem. Wie kannst du das Problem in CPLEX lösen (Hinweis: ZIMPL)? **(20 P.)**

Aufgabe 3 (Gaußscher Algorithmus): Zeige, dass die folgenden Operationen den Lösungsraum eines linearen Gleichungssystems nicht verändern. Ändert sich Rang(A)?

- Vertauschen von zwei Gleichungen.
- Multiplikation einer Gleichung mit einem Skalar.
- Addition eines skalaren Vielfachen einer Gleichung zu einer anderen Gleichung.

Zeige dazu, dass jede Lösung x vor einer Operation auch Lösung danach ist, und zusätzlich, dass eine Operation mit einer Operation rückgängig gemacht werden kann. **(10 P.)**

Aufgabe 4 (Angewandte lineare Unabhängigkeit):

a) Skizziere die folgenden Mengen von Vektoren im $\mathbb{R}^2$ und die davon aufgespannten Unterräume.

$$\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\},$$
$$\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\},$$
$$\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}\}$$

b) Sind folgende Mengen linear unabhängig? Begründe deine Antwort (mit Hilfe des Gaußschen Algorithmus).

$$\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}\},$$
$$\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\},$$
$$\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}\}$$

(4+6 P.)

Aufgabe 5 (Basislösungen eines LPs (optional)): Diese Aufgabe ist sehr gut geeignet, falls du Schwierigkeiten mit dem Gaußschen Algorithmus hast.
Betrachte folgendes LP

$$\begin{array}{lrcl} & \max\ x_1 + 4x_2 - x_3 & & \\ \text{unter} & 3x_1 + 2x_2 & \leqslant & 13 \\ & x_1 + 2x_3 & \leqslant & 15 \\ & x_2 - x_3 & \leqslant & -4 \\ & x_1, x_2, x_3 & \geqslant & 0. \end{array}$$

a) Schreibe das Problem in Standardform (Minimiere, Gleichheitsrestriktionen, nichtnegative Variablen).

b) Bestimme alle Basislösungen des Problems in Standardform und berechne den Zielfunktionswert. Du kannst aufhören, wenn klar ist, dass die Basislösung nicht zulässig ist.

c) Wie lautet die optimale Lösung des Problems?