Abteilung Algorithmik **Winter 15**
Institut für Betriebssysteme und Rechnerverbund
TU Braunschweig

Prof. Dr. Fekete
Dr. Quedenfeld

Mathematische Methoden der Algorithmik
Übung 1 vom 11.11.2015

Abgabe der Lösungen bis Dienstag, den 24.11.2015, 11:30 Uhr im
Hausaufgabenrückgabeschrank in der Abteilung Algorithmik.
Bitte die Blätter zusammenheften und vorne deutlich mit
eigenem Namen, Matrikelnummer, sowie Studiengang versehen.

Aufgabe 1 (Matching und Vertex Cover): Sei $G = (V, E)$ ein Graph, VC_{opt} ein optimales Vertex Cover und M_{opt} ein optimales Matching in G. Wir wissen aus der Vorlesung, dass $|M_{opt}| \leqslant |VC_{opt}|$ gilt.

(a) Zeige: $|VC_{opt}| \leqslant 2 \cdot |M_{opt}|$.

(b) Gib eine Klasse von Graphen an, für die $|VC_{opt}|$ beliebig groß wird und die Ungleichung aus (a) immer mit Gleichheit erfüllt ist.

(10+5 P.)

Aufgabe 2 (Dualität): Das Problem

$$(P_1) \begin{cases} \max & c^T x & \\ \text{s.t.} & Ax & \leq b \\ & x & \geq 0 \end{cases}$$

habe eine Lösung, und sein duales LP habe auch eine Lösung. Zeige, dass das Problem

$$(P_2) \begin{cases} \max & c^T x & \\ \text{s.t.} & Ax & \leq b' \\ & x & \geq 0 \end{cases}$$

für alle b' nicht unbeschränkt ist.

(20 P.)

Aufgabe 3 (Rohstoffquellen): Ein Energiekonzern möchte die Lieferungen von Rohstoffquellen und -anbietern zu Raffinerien neu organisieren. Davon sind zunächst drei Rohstofftypen $U = \{UO, UB, US\}$ (unraffiniertes Erdöl und unraffinierte Braun- bzw. Steinkohle) betroffen.
Es gibt konzerneigenen Rohstoffabbau sowie externe Zulieferer für jeden dieser Rohstofftypen, die als Quellen Q zusammengefasst sind. Jedes $q \in Q$ hat für jeden Rohstofftypen $u \in U$ eine Höchstkapazität k_q^u (hat Lieferant q z. B. kein Erdöl im Angebot, ist $k_q^{UO} = 0$).

Quelle	Rohstoff	Kapazität
Lieferant q_1	Erdöl	5000
	Braunkohle	5000
	Steinkohle	5000
Pipeline q_2	Erdöl	500
Konzerneigene Kohlegrube q_3	Braunkohle	400
Konzerneigene Bohrinsel q_4	Erdöl	1200

Tabelle 1: Kapazitäten der Rohstoffquellen

Raffinerie	Rohstoff	Bedarf
Raffinerie r_1	Erdöl	1500
Raffinerie r_2	Erdöl	2500
Kohleaufbereitungsanlage r_3	Braunkohle	800
	Steinkohle	1200

Tabelle 2: Rohstoffbedarf

Beliefert werden sollen Raffinerien R, die jeweils in der Lage sind, bestimmte Rohstoffe aus U zu verarbeiten. Der Bedarf von Rohstoff $u \in U$ in Raffinerie $r \in R$ ist d_r^u. Selbstverständlich werden keine Rohstoffe verschenkt und die Lieferungskosten hängen nicht nur vom jeweiligen Anbieter ab, sondern auch vom zurückzulegenen Transportweg. Der Preis, eine Einheit von Rohstoff $u \in U$ von Anbieter $q \in Q$ zu kaufen und zu Raffinerie $r \in R$ zu transportieren, ist t_{qr}^u pro Einheit.

a) Modelliere das obige Problem für allgemeine U, Q und R als LP, welches die Kosten minimiert. Dokumentiere, was deine Variablen und Nebenbedingungen bedeuten.

b) Löse das in den Tabellen angegebene Szenario mit CPLEX oder SoPlex. Abzugeben ist die `.lp` Datei und `cplex.log`, bzw. die Ausgabe von SoPlex. Markiere in der Ausgabe die Lösung und den Zielfunktionswert und beschreibe kurz, wie die Lösung zu interpretieren ist. (Hinweis: In `cplex.log` wird *alles* mitgeschrieben, was ihr mit cplex versucht habt, bitte gebt nur den relevanten Teil ab.)

(15 + 10 P.)

		r_1	r_2	r_3
q_1	Erdöl	251	245	—
	Braunkohle	—	—	97
	Steinkohle	—	—	114
q_2	Erdöl	262	263	—
q_3	Braunkohle	—	—	14
q_4	Erdöl	20	44	—

Tabelle 3: Kosten für Transport und Einkauf