Algorithmen und Datenstrukturen

Große Übung #2

Christian Scheffer Jan-Marc Reinhardt

Technische Universität Braunschweig

19.11.2015

Orga

- Kleine Übungen laufen seit letzter Woche 14-täglich
- Erste Hausaufgabe: Abgabe nächsten Mittwoch, 25.11.15

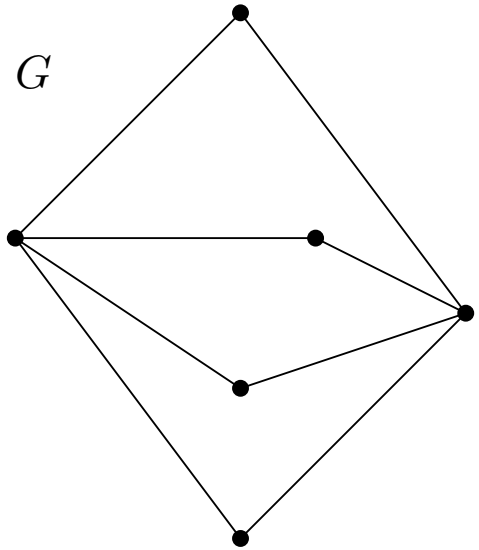
Programm für heute

1. Beweise
2. Graphenisomorphie

Beweise

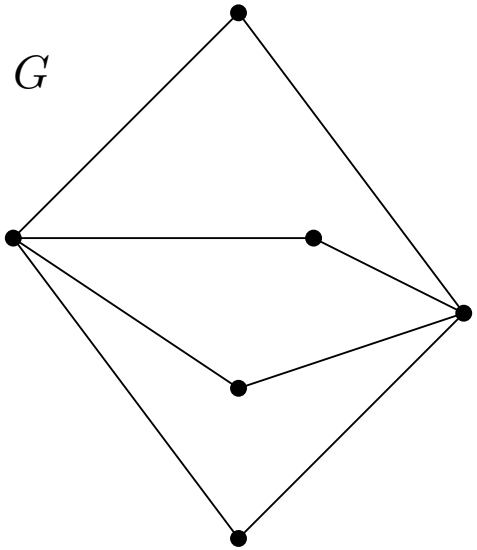
Aussagen

1. Die Zahl 7 ist ungerade.
2. Die Summe der ersten n natürlichen Zahlen ist $\frac{n(n+1)}{2}$.
3. Der Graph G ist eulersch.
4. In einem einfachen Graphen mit mindestens zwei Knoten gibt es zwei Knoten vom gleichen Grad.



Aussagen

1. Es gibt eine natürliche Zahl k mit $2k + 1 = 7$.
2. Für alle natürlichen Zahlen n gilt $\sum_{i=1}^{n} = \frac{n(n+1)}{2}$.
3. Es existiert eine Eulertour in G.
4. Für alle einfachen Graphen G mit mindestens zwei Knoten gilt: G enthält zwei Knoten vom gleichen Grad.



Wichtige Aussagentypen: Existenzaussagen und universelle Aussagen

Notation

1. $\exists k \in \mathbb{N}_0 \, (2k + 1 = 7)$
2. $\forall n \in \mathbb{N} \, (\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2})$
3. $\exists T \in E^m \, (T$ ist eine Eulertour$)$
4. $\forall G \in \mathcal{G}_{\geq 2} \, (\exists u \neq v \in V(G)(\delta(u) = \delta(v)))$

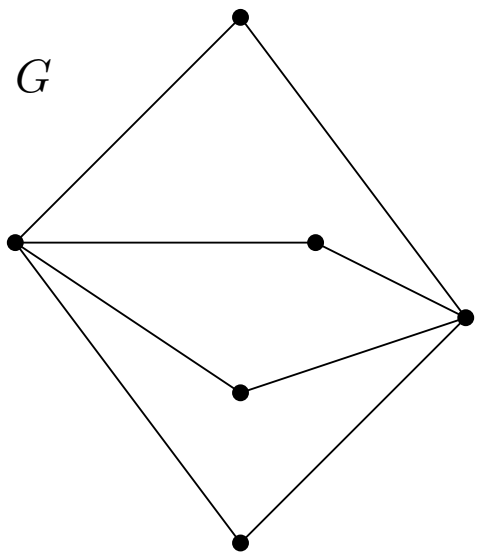
Verknüpfungen von Aussagen

- $A \wedge B$ (A und B)
- $A \vee B$ (A oder B)
- $A \Rightarrow B$ (aus A folgt B)
- $A \Leftrightarrow B$ (A genau dann wenn B)
- $\neg A$ (nicht A)

Weitere Aussagen

Eine Aussage ist entweder wahr oder falsch.

9. Die Zahl 8 ist nicht ungerade.
10. Für nicht alle natürlichen Zahlen n gilt $n = n^3 - n^2 - n$
11. Der Graph G ist nicht hamiltonsch.
12. Nicht alle Graphen mit ausschließlich geraden Knotengraden sind hamiltonsch.



Wenn eine Aussage wahr ist, ist ihre Negation falsch – und umgekehrt.

„Doppelte Verneinung“

9. Für alle natürlichen Zahlen k gilt $2k + 1 \neq 8$.
10. Es gibt eine natürliche Zahl n mit $n \neq n^3 - n^2 - n$.
11. Für alle Knotenfolgen T in G gilt: T ist kein Hamiltonkreis.
12. Es gibt einen Graphen mit ausschließlich geraden Knotengraden, der nicht hamiltonsch ist.

Allgemein:

$$\exists x P(x) \Leftrightarrow \neg \forall x \neg P(x)$$

$$\forall x P(x) \Leftrightarrow \neg \exists x \neg P(x)$$

Das bedeutet: Die Negation eine Existenzaussage ist eine universelle Aussage – und umgekehrt.

Beweis von Existenzaussagen

Existenzaussagen lassen sich oft einfach beweisen, da die Angabe von Beispielen genügt.

- Es gibt eine natürliche Zahl k mit $2k + 1 = 7$. $k = 3$!
- Es gibt eine natürliche Zahl n mit $n \neq n^3 - n^2 - n$. $n = 1$!
- Es gibt einen Graphen mit ausschließlich geraden Knotengraden, der nicht hamiltonsch ist. Betrachte einen Graphen, der nur isolierte Knoten hat (mindestens 2)!

Beweis universeller Aussagen

Wichtig

Ein Beispiel ist kein Beweis für eine universelle Aussage!

Alle Autos sind rot!?

Aber: Universelle Aussagen können durch Beispiele widerlegt werden.
(Nicht alle Autos sind blau.)

Voraussetzung und Schlussfolgerung

- Für jede ungerade natürliche Zahl n ist n^2 ungerade.
- In einem einfachen Graphen mit mindestens zwei Knoten gibt es zwei Knoten vom gleichen Grad.

- Sei n eine ungerade natürliche Zahl. Dann ist n^2 ungerade.
- Sei G ein einfacher Graph mit mindestens zwei Knoten. Dann enthält G zwei Knoten vom gleichen Grad.

$$A \Rightarrow B$$

Direkter Beweis

Voraussetzung A gilt, daraus wird B Schritt für Schritt gefolgert.

Beispiel an der Tafel

Für jede ungerade natürliche Zahl n ist n^2 ungerade.

Kontraposition

Beispiel

Sei für $n \in \mathbb{N}$ n^2 gerade. Dann ist auch n gerade.

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$$

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \Rightarrow B$	$\neg B \Rightarrow \neg A$
w	w	f	f	w	w
w	f	f	w	f	f
f	w	w	f	w	w
f	f	w	w	w	w

Beweis durch Widerspruch

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow \neg(A \wedge \neg B)$$

A	B	$\neg B$	$A \wedge \neg B$	$A \Rightarrow B$	$\neg(A \wedge \neg B)$
w	w	f	f	w	w
w	f	w	w	f	f
f	w	f	f	w	w
f	f	w	f	w	w

Beispiel an der Tafel 1

Das Schubfachprinzip: Verteilt man n Objekte auf $m < n$ Mengen, enthält eine Menge zwei Objekte.

Beispiel an der Tafel 2

In einem einfachen Graphen mit mindestens zwei Knoten gibt es zwei Knoten vom gleichen Grad.

Induktion

Grundidee: Statt $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0\, P(n)$ zeigt man $P(n_0)$ und $\forall x \in \mathbb{N}, x \geq n_0\, (P(x) \Rightarrow P(x+1))$.

Beispiel an der Tafel 1 (Gaußsche Summenformel)

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$.

Beispiel an der Tafel 2 (Eulerformel für planare Graphen)

Sei $G = (V, E)$ ein planar eingebetteter Graph mit $|F|$ Flächen und $|Z|$ Zusammenhangskomponenten. Dann gilt $|V| - |E| + |F| = |Z| + 1$.

Typische Aufgaben

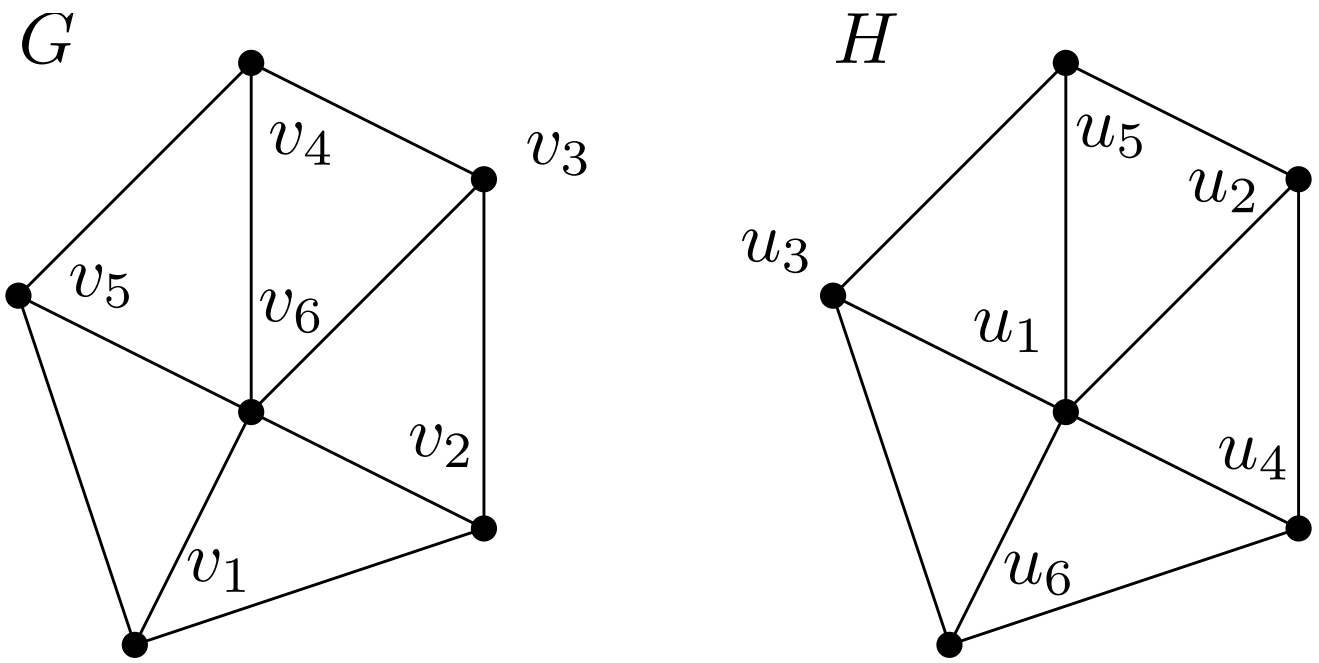
- „Zeige/Beweise $A \Rightarrow B$“: Aussage stimmt, gefordert ist ein Beweis.
- „Zeige oder widerlege $A \Rightarrow B$“: Selbst überlegen, ob die Aussage stimmt. Entsprechendes beweisen.
- „Zeige $A \Leftrightarrow B$“: Sowohl $A \Rightarrow B$ als auch $B \Rightarrow A$ müssen bewiesen werden.

Sinnvollerweise sollte man zunächst diese Fragen klären:

- Um welche Art von Aussage geht es?
- Welche Voraussetzungen sind gegeben?

Graphenisomorphie

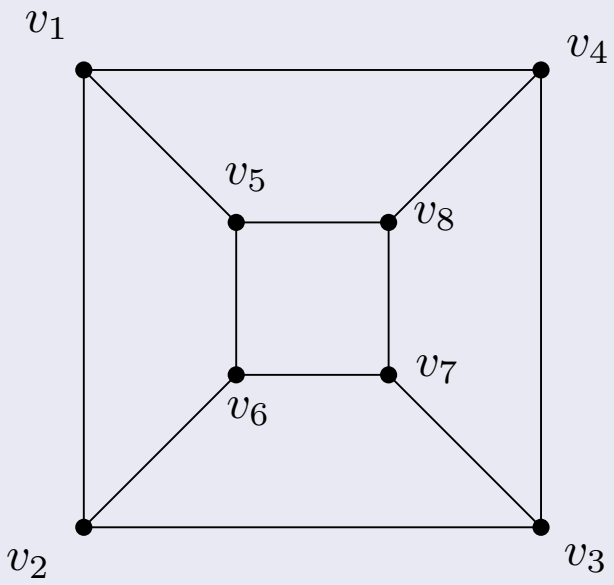
Zwei gleiche Graphen?

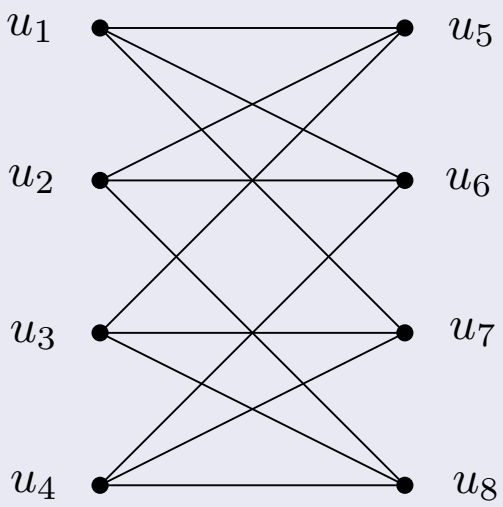


Nicht gleich, aber isomorph! $p : V(G) \to V(H)$ mit
$p(v_1) = u_6$, $p(v_2) = u_4$, $p(v_3) = u_2$, $p(v_4) = u_5$, $p(v_5) = u_3$, $p(v_6) = u_1$

Beweis der Isomorphie

Beispiel an der Tafel





Danke für die Aufmerksamkeit!

Fragen?