SATZ 3.8

(1) Das Verfahren 3.7 ist endlich.
(2) Das Verfahren 3.7 funktioniert korrekt.

Beweis:

(1) Bei jedem Durchlauf der Schleife 2. wird entweder in 2.2.1 ein Element aus R entfernt, oder in 2.3.2 ein Element zu R hinzugefügt und auch zu Y hinzugefügt. Also kann man 2.3.2 nur $(n-1)$-mal durchlaufen, also auch nur R $(n-1)$-mal erweitern, also R höchstens n-mal verkleinern. 2. kann also höchstens $(2n-1)$-mal durchlaufen werden.

(2) Zu jedem Zeitpunkt ist $(Y;T)$ ein s enthaltender Baum, denn
(a) alle Knoten in Y sind von s aus erreichbar (und umgekehrt)
(b) neu eingefügte Kanten verbinden die bisherige Knotenmenge Y nur mit bislang nicht erreichbaren Knoten, können also keinen Kreis schließen.

Jetzt müssen wir noch zeigen, dass alle erreichbaren Knoten auch korrekt identifiziert werden.

Angenommen, am Ende gibt es einen Knoten $w \in V \setminus Y$, der in G von s aus erreichbar ist.

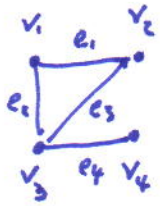
Sei P ein s-w-Pfad in G, und sei $\{x,y\}$ eine Kante von P mit $x \in Y$, $y \notin Y$.

Da x zu Y gehört, wurde x auch zu R hinzugefügt. Der Algorithmus stoppt aber nicht, bevor x aus R entfernt wurde. Das wird in 2.2.1 nur vorgenommen, wenn es in 2.2 keine Kante $\{x,y\}$ mit $y \notin Y$ gibt – im Widerspruch zur Annahme. $\square$

3.6 Datenstrukturen für Graphen

Wie beschreibt man einen Graphen?

(1) Inzidenzmatrix



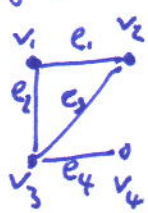
$$\begin{array}{c|cccc} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ \hline v_1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ v_2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ v_3 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ v_4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

(„inzident": zusammen-treffend)

Also: $A \in \{0,1\}^{n \times m}$ mit $a_{v,e} := \begin{cases} 1 & \text{für } v \in e \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Größe: nm für einen Graphen mit n Knoten, m Kanten. (Viele Nullen!)

(2) Adjazenzmatrix



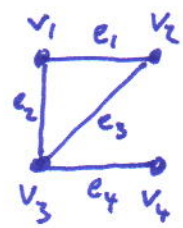
$$\begin{array}{c|cccc} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ \hline v_1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ v_2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ v_3 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ v_4 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

(„adjazent": verbunden)

Also: $A \in \{0,1\}^{n \times n}$ mit $a_{v,w} := \begin{cases} 1 & \text{für } \{v,w\} \in E \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Größe: n^2 für einen Graphen mit n Knoten.

(3) Kantenliste



$\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_4\}$

Benötigt wird eine Kantennummerierung!

→ Jeder Index ist eine Binärzahl mit $(\log_2 n + 1)$ Bits, bzw. eine Dezimalzahl mit $(\log_{10} n + 1)$ Stellen.

Unterschied in Codierungslänge: Ein Faktor $\log_2 10 = 3{,}3219\ldots$, denn $\log_2 n = \log_2 10 \cdot \log_{10} n$

Für einen Graphen mit m Kanten und n Knoten ergibt sich in obiger (ausführlicher) Codierung ein Platzbedarf von

$$(6m-1) + 2m(\log_{10} n + 1).$$

Dabei kann man an ein paar Stellen sparen (z.B. „v" oder „{", „}" weglassen) aber auch mehr Platz investieren (z.B. in ASCII codieren bzw. binär statt dezimal codieren). So wäre auch

$$(2m-1) + 2m(\log_2 n + 1) \quad \text{denkbar.}$$

Was ist wirklich wichtig dabei?!

(i) Die Kantenliste ist sparsamer als die Inzidenzmatrix, denn wenn n nicht zu klein ist, dann ist

$$n \geq 2 + 2(\log_2 n + 1).$$

(was heißt „nicht zu klein"? $n \geq 8$ reicht!)

Also ist auch

$$mn > (2m-1) + 2m(\log_2 n + 1).$$

(ii) Unabhängig von der Codierung ist für die Größe des Speicherplatzes der zweite Ausdruck wichtig, denn

$$2m(\log_2 n + 1) \leq (2m-1) + 2m(\log_2 n + 1)$$
$$\leq 4m(\log_2 n + 1) \quad \text{für } n \geq 2.$$

(iii) Letztlich kommt es also gar nicht so sehr auf die Vorfaktoren an (die sind codierungsabhängig!), sondern auf den Ausdruck

$$m \log n.$$

(iv) In $m \log n$ steckt das Wesen der Kantenliste:
Zähle für alle m Kanten die Nummern der beteiligten Knoten auf!