Abteilung Algorithmik **Winter 2014/15**
TU Braunschweig

Prof. Dr. Sándor P. Fekete

Mathematische Methoden der Algorithmik
Übung 3 vom 04. 12. 2014

Abgabe der Lösungen bis zum Mittwoch, den 17.12.14 um 13:00.

Einwurf im entsprechenden Fach des Holzkastens vor der Algorithmik. Bitte die Blätter zusammenheften und vorne deutlich mit eigenem Namen versehen.

Aufgabe 1 (Basiswechsel): Gegeben sei das folgende lineare Programm:

$$\begin{array}{lrcrcrcrcrcl}
\max & 7x_1 & + & 6x_2 & + & 5x_3 & - & 2x_4 & + & 3x_5 & & \\
& x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & - & 2x_4 & + & 2x_5 & \leq & 4 \\
& 4x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & + & x_5 & \leq & 5 \\
& 2x_1 & + & 4x_2 & + & 4x_3 & - & 2x_4 & + & 5x_5 & \leq & 5 \\
& x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & - & 2x_5 & \leq & 1 \\
& x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4, & & x_5, & \geq & 0
\end{array}$$

a) Bringe das Problem auf Standardform. (Damit erhälst Du sofort eine zulässige Basis.) Wir bezeichnen die Spalten der Matrix A mit $a_{\cdot i}, i = 1 \ldots, 9$.

b) Ausgehend vom Problem in Stadardform, tausche nacheinander die Vektoren $a_{\cdot 1}, a_{\cdot 2}, a_{\cdot 3}$ in die Basis, so dass diese immer zulässig bleibt. (Gehe dabei jeweils vom Problem in Standardform aus.) Gib den Zielfunktionswert an. Welcher Tausch ist unter diesem Gesichtspunkt sinnvoll, welcher nicht?

(5+15 Punkte)

Aufgabe 2 (LP-Formulierung eines Optimierungsproblems):
Schreibe das folgende lineare Programm zunächst in Standardform und rechne sechs Pivotschritte. Verwende dabei folgende Pivotregeln: Als Pivotspalte wird jeweils die mit dem kleinsten negativen Kostenkoeffizienten gewählt; kommen zwei verschiedene Zeilen zum Pivotisieren in Frage, wird die mit dem kleinsten Variablenindex gewählt. Was ist in Bezug auf die Endlichkeit der Simplexmethode mit dieser Auswahlregel zu schließen?

$$\begin{array}{lrcrcrcrcl}
\min & -3x_1 & + & 80x_2 & - & 2x_3 & + & 24x_4 & & \\
& x_1 & - & 32x_2 & - & 4x_3 & + & 36x_4 & \leq & 0 \\
& 2x_1 & - & 48x_2 & - & 2x_3 & + & 12x_4 & \leq & 0 \\
& & & & + & 4x_3 & & & \leq & 1 \\
& x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4, & \geq & 0
\end{array}$$

(20 Punkte)

Aufgabe 3 (Nikolausaufgabe – Santa Claus und die Schneefräse):

"Hmmm, hmmm, hmmm", brummte Santa Claus in seinen Bart. Hätte er bloß nie auf diese Unternehmensberater gehört. "Ein Fahrzeug mit Kufen benutzt heutzutage niemand mehr, der Verschleiß ist einfach zu groß. Und außerdem, Schnee ist sowieso nur ein temporäres Phänomen, in 20 Jahren redet niemand mehr davon. Tja, Mr. Claus, da gibt es ordentliches Einsparpotential und in Bezug auf die Geschwindigkeit ist beim Wechsel von Kufen auf Reifen auch noch einiges rauszuholen!", hatten sie ihm vorgerechnet. Danach waren noch jede Menge Einzelheiten dargestellt worden, die er aber nicht so richtig verstanden hatte. Nach den Regeln der Physik hätte er wohl schon in den Vorjahren einfach verglühen müssen... Letztendlich hatte er sich dann für vier neue Winterreifen (mit besonders hohem Schmelzpunkt) für seinen Schlitten entschieden. Aber im Moment brauchte er sich über Höchstgeschwindigkeiten gar keine Gedanken machen; er kam noch nicht einmal mit seinem Schlitten aus der Garage. In der Nacht hatte es einen Meter Schnee gegeben. Mit Kufen wäre das kein Problem gewesen, aber mit Rädern keine Chance. Da fiel ihm ein, dass er irgendwo auf seinem Schlitten eine Schneefräse (Snow-Blower hatte auf dem Wunschzettel gestanden) für jemanden in New York haben müsste. Der wollte damit einige Experimente machen. "Wie auch immer – dieses Ding könnte mir doch helfen. Ich brauche ja auch nur meine Einfahrt zu räumen, die Straße ist frei", murmelte er in seinen weißen Bart. Nachdem er den Snow-Blower gefunden hatte, las er sich die Gebrauchsanweisung durch und stellte fest, dass Schnee bis zu einer Höhe von maximal einem Meter beseitigt werden kann – Glück gehabt. Außerdem konnte der Snow-Blower den Schnee nur nach rechts (in Fahrtrichtung gesehen) wegräumen. Um keine Zeit zu verschenken, machte er sich eine Skizze von seiner Einfahrt (Abb. 1) und wollte noch kurz die optimale Räum-Strategie bestimmen bevor es losging. Aber so einfach war das ja gar nicht, stellte er fest. "Dann nochmal in Ruhe", dachte er, und formulierte das Problem ganz "mathematisch":

Gegeben: Ein 3*3-Gitter sowieso eine Garage, ein Snow-Blower und eine Einheit Schnee auf jedem Gitterfeld. Der Snow-Blower kann Schnee von maximal einer Einheit um ein Feld nach rechts werfen (immer in Fahrtrichtung gesehen) und sich horizontal und vertikal von Feld zu Feld bewegen. Wenn der Schnee über den Rand des 3*3-Gitters geworfen ist, ist er geräumt (um die Höhe des dortigen Schneeberges braucht man sich keine Gedanken machen). Der Snow-Blower selbst darf den Bereich (3*3-Gitter + Garage) nicht verlassen.

Gesucht: Eine optimale Strategie, die den Schnee aus dem gesamten 3*3 Gitter entfernt (über den Rand befördert), dabei keinen Schnee in die Garage wirft und danach wieder in die Garage zurückkehrt.

Folgende Aufgaben gilt es also zu lösen:

a) Finde eine Strategie, die möglichst wenige Schritte benötigt.

b) Zeige, dass deine Strategie optimal ist, d.h., dass es keine Strategie gibt, die mit weniger Schritten auskommt.

(Hinweise: Diese Aufgabe hat nur begrenzt mit linearer Optimierung zu tun! Um Teil b) zu beantworten ist es sinnvoll, sich einige Eigenschaften zu überlegen, die die optimale Tour erfüllen muss und damit dann eine untere Schranke für die Länge der optimalen Tour anzugeben. Insbesondere sollten nicht alle Touren enumeriert und verglichen werden.)

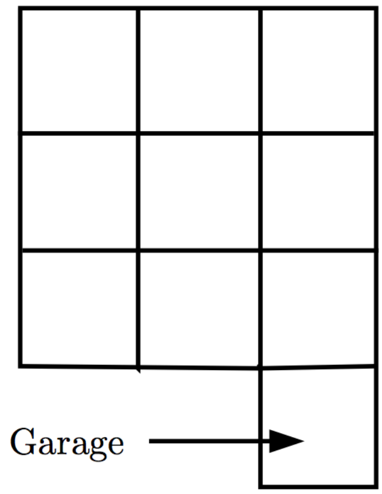

Abbildung 1: Das ist das Haus des Santa Claus – bzw. die Einfahrt mit Garage davor.

(5+15 Punkte)