Abteilung Algorithmik **Winter 2014/15**
TU Braunschweig

Prof. Dr. Sándor P. Fekete

Mathematische Methoden der Algorithmik
Übung 1 vom 7. 11. 2014

Abgabe der Lösungen bis zum Mittwoch, den 19.11.14 um 13:00.

Ort wird in der Vorlesung bekanntgegeben. Bitte die Blätter zusammenheften und vorne deutlich mit eigenem Namen versehen.

Aufgabe 1 (Vertex Cover und Matching): Sei $G = (V, E)$ ein Graph, VC_{opt} ein optimales Vertex Cover und M_{opt} ein optimales Matching in G. Wir wissen aus der Vorlesung, dass $|M_{opt}| \leq |VC_{opt}|$

a) Zeige: $|VC_{opt}| \leq 2 \cdot |M_{opt}|$.

b) Gib eine Klasse von Graphen an, für die $|VC_{opt}|$ beliebig groß wird und die Ungleichung aus a) immer mit Gleichheit erfüllt ist.

(10+10 Punkte)

Aufgabe 2 (Ein lineares Optimierungsproblem): Ein Whisky-Importeur unterhält zwar einen unbegrenzten Markt für seine Ware, aber durch Importbeschänkungen werden seine monatlichen Einkausmengen folgendermaßen begrenzt:

Sir Roses	höchstens 2000 Flaschen zu 35 Euro,
Highland Wind	höchstens 2000 Flaschen zu 25 Euro,
Old Frenzy	höchstens 1200 Flaschen zu 20 Euro.

Daraus stellt er drei Mischungen, A, B und C her, die er zu 34 EUR, 28.50 EUR, bzw. 22.50 EUR pro Flasche verkauft. Die Zusammensetzung der Mischungen ist:

A	wenigstens 60% *Sir Roses*
	höchstens 20% *Old Frenzy*
B	wenigstens 15% *Sir Roses*
	höchstens 60% *Old Frenzy*
C	höchstens 50% *Old Frenzy*

Wie sollten die Mischungen aussehen, und wieviel sollte von jeder Mischung hergestellt werden, um einen maximalen Gewinn zu erzielen? Formuliere dieses Problem als lineares Optimierungsproblem. (Das Problem muss *nicht* gelöst werden!)

(15 Punkte)

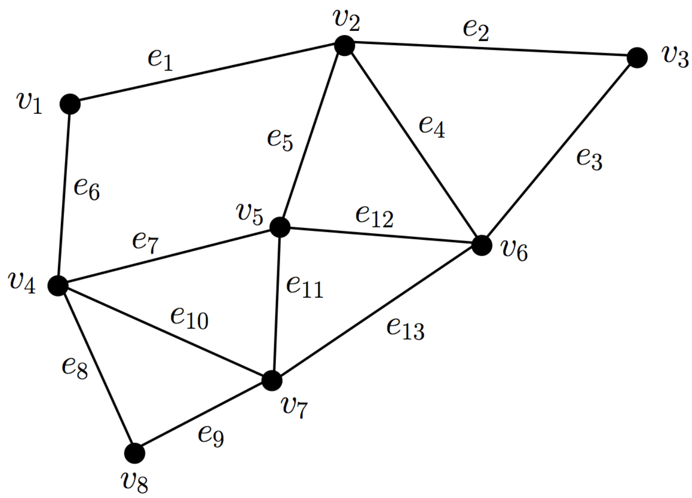

Abbildung 1: Ein Graph G

Aufgabe 3 (Independent Set und Edge Cover):

a) Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Beim Maximum-Independent-Set-Problem wird eine kardinalitätsmaximale Menge von Knoten gesucht, die paarweise nicht adjazent sind. Anders formuliert: Für jede Kante darf höchstens ein Knoten in die Menge aufgenommen werden. Fomuliere das Maximum-Independent-Set-Problem als ganzzahliges lineares Optmimierungsproblem, IP_{IS}.

b) Beim Minimum-Edge-Cover-Problem in einem Graphen $G = (V, E)$ wird eine kardinalitätsminimale Menge von Kanten gesucht, so dass jeder Knoten in G zu mindestens einer ausgewählten Kante inzident ist. $|EC|$ bezeichne die Größe einer optimalen Lösung für dieses Problem, $|IS|$ die Größe einer optimalen Lösung für das Maximum-Independent-Set-Problem. Zeige, dass für jeden Graphen

$$|EC| \geq |IS|$$

gilt.

c) Das Minimum-Edge-Cover-Problem kann wie folgt als ganzzahliges lineares Optimierungsproblem, IP_{EC}, formuliert werden:

$$\begin{array}{llllll} \min & \sum_{e \in E} & \mathrm{x}_e & & & \\ & \sum_{e \in \delta(v)} & \mathrm{x}_e & \geq & 1 & \forall v \in V \\ & & \mathrm{x}_e & \in & \{0,1\} & \forall e \in E. \end{array}$$

Finde eine optimale Lösung für den Graphen aus Abbildung 1 und beweise die Optimalität.

d) Formuliere die beiden zugehörigen linearen Optimierungsprobleme LP_{EC} und LP_{IS}. Sei $|EC_{LP}|$ die Größe einer optimalen Lösung für das lineare Optimierungsproblem, und sei $|IS_{LP}|$ analog definiert. Gib einen Graphen an, für den

$$|IS| < |IS_{LP}| = |EC_{LP}| < |EC|$$

gilt.

(10+4+4+7 Punkte)