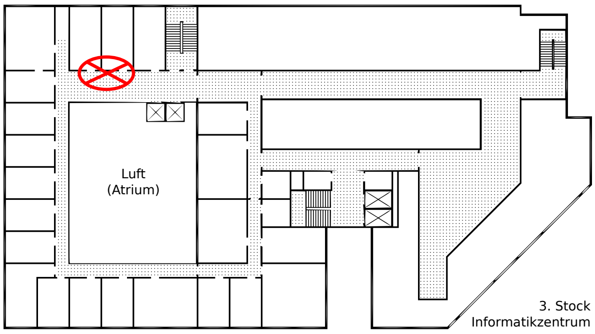
Abteilung Algorithmik **Winter 2014/15**
Institut für Betriebssysteme und Rechnerverbund
TU Braunschweig

Prof. Dr. Sándor P. Fekete
Dr. Christian Scheffer

Algorithmen und Datenstrukturen
Übung 1 vom 14. 11. 2014

Abgabe der Lösungen bis zum Donnerstag, den 27. 11. 2014 um 14:30 im Hausaufgabenrückgabeschrank.

Bitte die Blätter zusammenheften und vorne deutlich mit eigenem Namen, Matrikel- und Gruppennummer, sowie Studiengang versehen!



Aufgabe 1 (Eulerweg und Eulertour): Betrachte den Graphen G aus Abbildung 1.

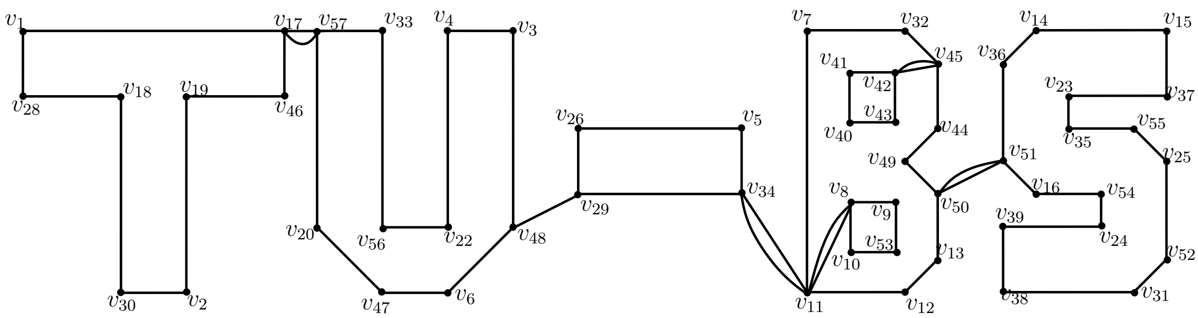


Abbildung 1: Der Graph G

a) Finde eine Eulertour in G oder zeige, dass keine existiert.

b) Finde einen Eulerweg in G oder zeige, dass keiner existiert.

c) Falls keine Eulertour existiert: Wie viele und welche Kanten müssen dem Graphen maximal hinzugefügt werden, damit eine Eulertour existiert.

Falls eine Eulertour existiert: Wie viele und welche Kanten können maximal aus dem Graphen entfernt werden werden, damit noch eine Eulertour existiert.

(5+13+2 Punkte)

Aufgabe 2 (Algorithmen): Gegeben sei folgender Algorithmus, der aus einer gegebenen nichtleeren Menge paarweise verschiedener[1] ganzer Zahlen $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}, n \geq 1$, das zweitkleinste Element bestimmt:

[1] D. h. $a_i \neq a_j$ für alle $i \neq j$

```
1: function MINIMUM2(a_1, ..., a_n)
2:     m ← ∞
3:     m_2 ← ∞

4:     for i ← 1, ..., n do
5:         if a_i < m then
6:             m_2 ← m
7:             m ← a_i
8:         else if a_i < m_2 then
9:             m_2 ← a_i
10:        end if
11:    end for

12:    return m_2
13: end function
```

Algorithmus 1: Berechnung des zweitkleinsten Elements einer Menge

a) Analysiere den Funktionsaufruf MINIMUM2$(5, 7, 9, 6, -1, 2, 10, -10, -3, 8)$. Gib dazu in jeder Iteration die Werte von i, m, m_2 und a_i nach Zeile 10, sowie den Rückgabewert der Funktion an.

b) Zeige: Falls $n = 1$, gilt nach Ausführung des Algorithmus $m \neq \infty$ und $m_2 = \infty$, sonst ($n \geq 2$), gilt nach Ausführung des Algorithmus $m \neq \infty$ und $m_2 \neq \infty$.

c) Zeige: Für $n \geq 2$ gilt im i-ten Schleifendurchlauf nach Zeile 10: $m < m_2$. (Hinweis: Vollständige Induktion!)

d) Zeige: Für $n \geq 2$ gilt im i-ten Schleifendurchlauf nach Zeile 10: $m = \min\{a_1, \ldots, a_i\}$.

(7+5+4+4 Punkte)

Aufgabe 3 (Graphen): Wie in der Vorlesung beschrieben, ist jede Kante eines einfachen Graphen zu genau zwei Knoten *inzident*. Die Anzahl der Kanten, zu denen ein Knoten v inzident ist, bezeichnet man als *Grad von* v, abgekürzt durch $\delta(v)$.

a) Zeichne einen beliebigen Graphen mit $n \geq 6$ Knoten $v_1, \ldots, v_n$ und $m \geq 12$ Kanten $e_1, \ldots e_m$. überprüfe, ob in diesem Graphen $\sum_{i=1}^{n} \delta(v_i) = 2m$ ist.

b) Zeige oder widerlege: In *jedem* einfachen Graphen mit n Knoten $v_1, \ldots, v_n$ und Kanten $e_1, \ldots, e_m$ ist $\sum_{i=1}^{n} \delta(v_i) = 2m$.

c) Zeige: *Jeder* einfache Graph mit n Knoten und n Kanten enthält einen Kreis. (Hinweis: Wie viele verschiedene Knoten können i Kanten verbinden, ohne einen Kreis zu erzeugen?)

d) Zeige oder widerlege: *Jeder* einfache Graph mit n Knoten hat höchstens $2n + 1$ Kanten.

(4+5+5+6 Punkte)