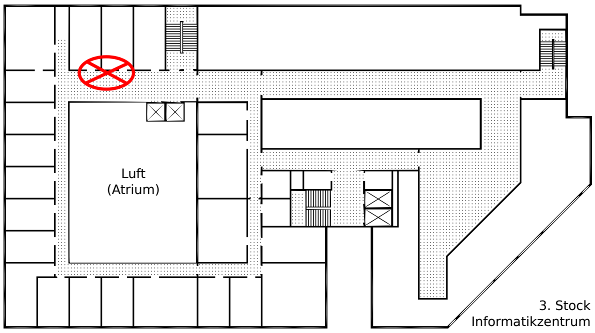
Abteilung Algorithmik **Winter 2013/14**
Institut für Betriebssysteme und Rechnerverbund
TU Braunschweig

Alexander Kröller
Henning Hasemann
Melanie Papenberg

Mathematische Methoden der Algorithmik
Übungsblatt 5 vom 08.01.2014

Abgabe der Lösungen in der Vorlesung am Mittwoch, den 22.01.2014 PK2.1 oder bis 13:15 im Hausaufgabenrückgabeschrank.

Bitte die Blätter vorne deutlich mit eigenem Namen sowie Matrikelnummer versehen!



Aufgabe 1 (LP-Umformungen): Gegeben ein (primales) LP der Form

$$(P)\begin{cases} \max & c^T x \\ \text{s.t.} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{cases}$$

Zeige: Das duale des dualen LPs zu P ist P. **(4 Punkte)**

Aufgabe 2 (Integer Programming): Als Integer Program (IP) bezeichnet man Probleme der Form

$$\begin{array}{ll} \max & c^T x \\ \text{s.t.} & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \\ & x \in \mathbb{Z} \end{array}$$

Neu dabei ist die Bedingung $x \in \mathbb{Z}$, die Variablen auf Ganzzahligkeit einschränkt. Ansonsten dürfen die Probleme analog zu den bekannten LPs umformuliert werden (min statt max, $Ax = b$, x frei, etc...), Matrix-Schreibweise ist also nicht erforderlich.

Modelliere die folgenden Probleme jeweils als IP. Beschreibe dabei jede Restriktion kurz mit eigenen Worten.

a) Gegeben sei ein Behälter der Größe W sowie n Objekte mit Größen w_i und Profiten $p_i, i = 1, \ldots, n$. Ziel ist es, den Behälter so zu befüllen, dass der Profit maximal ist.

b) Betrachte nun einen Relaxierungs-Ansatz für das in a) erstellte IP. Das heisst, wir betrachten das zum ermittelten IP analoge LP, bei dem die Constraint $x \in \mathbb{Z}$ wegfällt.

   Wie wird sich die Lösung des relaxierten Problems von dem orginalen IP unterscheiden? Wieviele fraktionale Objekte wird die relaxierte Lösung im Allgemeinen verwenden? Wie wird sich der Zielfunktionswert von dem des IPs unterscheiden?

c) Gegeben seine unendlich viele Behälter der Größe 1 sowie n Objekte mit Größen $w_i, i = 1, \ldots, n$. Ziel ist es, alle Objekte in möglichst wenige Behälter zu packen. (Hinweis: Eine Menge von Objekten kann in einen Behälter gepackt werden, wenn die Summe der Größen kleiner als die Behältergröße ist.)

(2+2+2 Punkte)

Aufgabe 3 (Komplementärer Schlupf): Gegeben sei das folgende lineare Programm (P):

$$\begin{array}{lrcrcrcrcrl}
\max & 7x_1 & + & 6x_2 & + & 5x_3 & - & 2x_4 & + & 3x_5 & \\
\text{s.t.} & x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & - & 2x_4 & + & 2x_5 & \leq 4 \\
 & 4x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & + & x_5 & \leq 3 \\
 & 2x_1 & + & 4x_2 & + & 4x_3 & - & 2x_4 & + & 5x_5 & \leq 5 \\
 & 3x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & - & 2x_5 & \leq 1 \\
 & & & & & & & x_1, & \ldots, & x_5 & \geq 0
\end{array}$$

a) Formuliere das duale Problem zu (P).

b) Formuliere die Bedingungen für komplementären Schlupf zu (P).

c) Prüfe mit Hilfe des Satzes vom komplementären Schlupf, ob $x = \left(0, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{3}, 0\right)^T$ eine optimale Lösung von (P) ist. (Hinweis: Auch wenn man die duale Lösung y nicht kennt, kann man Bedingungen herleiten, die ein y erfüllen muss, und dann konkrete Dinge berechnen.)

(2+2+2 Punkte)