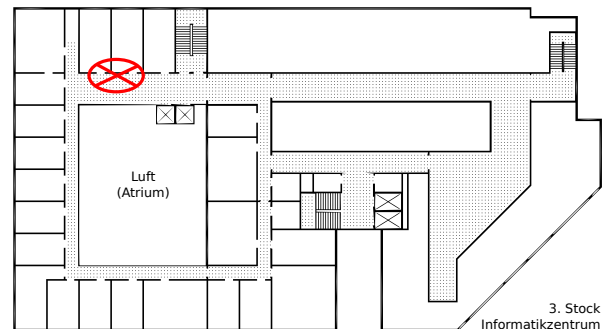


Alexander Kröller
Henning Hasemann
Melanie Papenberg

Mathematische Methoden der Algorithmik Übungsblatt 4 vom 11.12.2013

Abgabe der Lösungen in der Vorlesung am
Mittwoch, den 08.01.2014 PK2.1 oder bis
13:15 im Hausaufgabenrückgabeschrank.

**Bitte die Blätter vorne deutlich mit
eigenem Namen sowie Matrikelnum-
mer versehen!**



Aufgabe 1 (Leise rieselt der Schnee): Dank durch MMA-Studenten optimierter Vertriebswege floriert zur Weihnachtszeit das Backpulvergeschäft in Gotham City wie noch nie.

Die Händler beziehen zwecks bester Erreichbarkeit Posten an den Kreuzungen der Stadt, wissend, dass Polizisten die Strassen entlang patrouillieren (und dabei die zwei an der Straße anliegenden Kreuzungen bewachen). Für eine langfristige Planung ist es von Interesse, das Verhältnis von Polizisten zu Händlern dahingehend zu optimieren, dass möglichst viele Polizisten zur Überwachung herangezogen werden müssen.

Im besten Fall verteilen sich die Backpulverdealer gerade so in der Stadt, dass für jede Kreuzung mit einem Dealer ein Polizist auf einer anliegenden Straße abgestellt ist, der diese Kreuzung bewacht. Insbesondere kann in diesem Worst-Case für die Polizei kein Polizist zwei Händler gleichzeitig bewachen. Das heisst, wenn die Kriminellen sich so aufstellen würden, dass sie so viele Dealer wie möglich platzieren, ohne dass zwei an der selben Straße stehen, hätte man die maximale Anzahl Dealer platziert so dass die Polizei für jeden einen dedizierten Polizisten abstellen muss.

Wir wollen zunächst vereinfachend annehmen, dass wir *fraktionale* Händler verteilen können, d.h. Lösungen wie “auf der Kreuzung stehen 0.5 Dealer” sollen erlaubt sein. (Wir können uns vorstellen, dass die Dealer nur von Zeit zu Zeit auftauchen).

- a) Gegeben eine Menge $V = \{v_1, v_2, \dots\}$ von Kreuzungen und eine Menge $E \subseteq V \times V$ von (ungerichteten) Straßen, formuliere ein LP der Form

$$(P) \begin{cases} \max & c^T x \\ \text{s. t.} & \dots \end{cases}$$

welches die optimale Verteilung von fraktionalem Händlern auf die Kreuzungen V bestimmt, so dass an jeder Straße in Summe höchstens ein ganzer Händler anliegt und die Gesamtzahl der Händler maximiert wird. (Hinweis: Dabei ist es in der Notation erlaubt die Menge $\delta(v)$, also die Menge aller Kanten an einem gegebenen Knoten v zu verwenden)

- b) Abbildung 1 zeigt eine einfache Stadt mit $V = \{v_1, v_2, v_3\}$ und $E = V \times V$. Wende das LP auf diese Stadt an und bestimme das Ergebnis mit dem Simplex-Algorithmus. Abgabe: Tableau-Rechenschritte.
- c) Gib für jedes Tableau aus der vorigen Teilaufgabe die aktuelle Basis, Nichtbasis und Basislösung an. Markiere jeweils, ob die aktuelle Basislösung degeneriert ist, ob sie optimal oder ob das LP unbeschränkt ist und woran du all das im Tableau erkennst.
- d) Erstelle aus deiner allgemeinen mathematischen Formulierung des Problems eine allgemeine ZIMPL-Formulierung und wende sie auf die Stadt in Abb. 1 an, indem du die zur Verfügung gestellte ZIMPL-Datei erweiterst. (Hinweis: Damit kannst dein Ergebnis in der vorigen Teilaufgabe überprüfen.) (Hinweis: Abzugeben ist hierfür die vollständige ZIMPL-Datei.)
- e) Für eine dauerhafte Postierung sollen nun nur entweder 0 oder 1 Händler pro Kreuzung zulassen. Modifiziere den ZIMPL-Code entsprechend und berechne die Verteilung von Händlern für Gotham City (Abbildung 2). (Hinweis: Abzugeben ist hierfür die ZIMPL-Datei sowie entsprechender Optimierer-Output, der die Lösung zeigt.)

(3+4+2+2 Punkte)

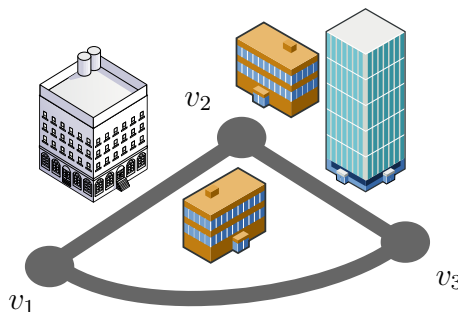


Abbildung 1: Einfache Stadt. ZIMPL-Code für den Graphen gibt es unter <http://www.ibr.cs.tu-bs.de/courses/ws1314/mma/city.zpl>

Aufgabe 2 (Leise rieselt der Schnee II - Jetzt erst recht): Die Polizei war in der Zwischenzeit nicht untätig und hat ihrerseits einen Algorithmiker bemüht um sie bei der Backpulver-Problematik zu unterstützen.

Aus Sicht der Polizei stellt sich das Problem wie folgt dar: Mit möglichst wenigen Polizisten sollen Straßen so abgedeckt werden, dass alle Kreuzungen eingesehen werden können (ein Polizist auf einer Straße sieht genau die beiden Kreuzungen, zwischen denen die Straße verläuft).

- a) Das Problem ist das duale Problem zu der Positionierung der Händler in Aufgabe 1. Kannst du mit diesem Wissen eine Methode angeben, die eine untere Schranke für die Anzahl der benötigten (ganzzahligen!) Polizisten berechnet?

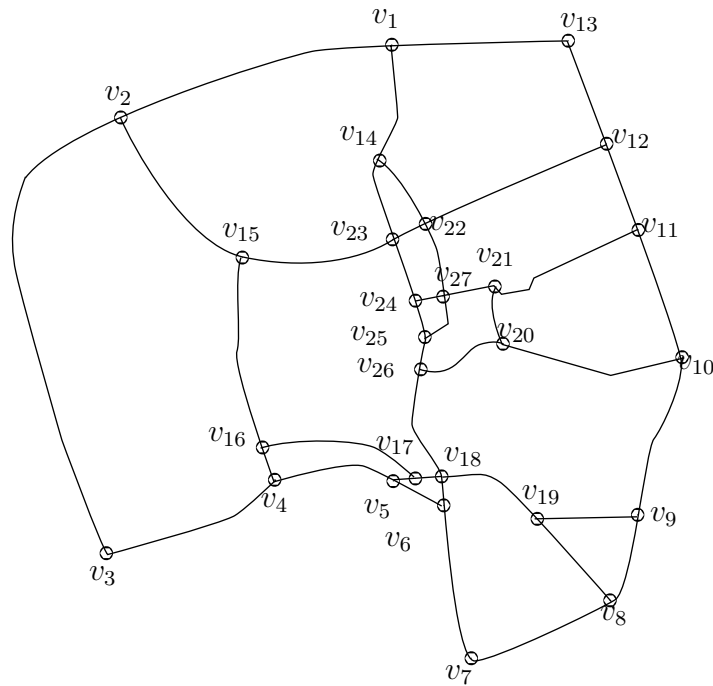


Abbildung 2: Gotham City. ZIMPL-Code für den Graphen gibt es unter <http://www.ibr.cs.tu-bs.de/courses/ws1314/mma/gotham.zpl>

- b) Betrachte auch hier zunächst wieder eine fraktionale (*relaxierte*) Variante: Auf jeder Straße werden zwischen 0 und 1 fraktionale Polizisten positioniert, so dass an jeder Kreuzung in Summe mindestens ein ganzer Polizist anliegt.

Formuliere das LP für dieses fraktionale Problem (inklusive kurzer Erklärung der Variablen / Ungleichungen) und zeige, dass dein LP das duale von dem in Aufgabe 1a ist.

- c) Formuliere das ganzzahlige Problem (genau 0 oder 1 Polizisten pro Straße) in ZIMPL und berechne damit die Verteilung von Polizisten für Gotham City (Abbildung 2). (Hinweis: Abzugeben ist hierfür die ZIMPL-Datei sowie entsprechender Optimierer-Output, der die Lösung zeigt.)

(2+3+2 Punkte)

Wir wünschen frohe Weihnachten und einen Guten Rutsch!