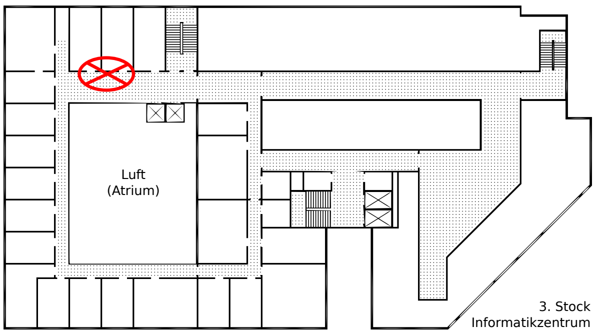
Abteilung Algorithmik **Winter 2013/14**
Institut für Betriebssysteme und Rechnerverbund
TU Braunschweig

Alexander Kröller
Henning Hasemann
Melanie Papenberg

Mathematische Methoden der Algorithmik
Übungsblatt 2 vom 13. 11. 2013

Abgabe der Lösungen in der Vorlesung am Mittwoch, den 27. 11. 2013 PK2.1 oder bis 13:15 im Hausaufgabenrückgabeschrank.



Bitte die Blätter vorne deutlich mit eigenem Namen sowie Matrikelnummer versehen!

Aufgabe 1 (Standardformen von LPs): Gegeben ist folgendes lineares Optimierungsproblem:

$$
(P)\left\{\begin{array}{lrcrcrcrl}
\max & 7x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & + & \frac{1}{2}x_4 & \\
\text{s. t.} & 4x_1 & - & 3x_2 & & & & & \geq 4 \\
& x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & \geq 10 \\
& & & x_2 & & & - & x_4 & = 5 \\
& 3x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & \leq 50 \\
& x_1 & & & & & & & \text{frei} \\
& & & x_2 & & & & & \geq -3 \\
& & & & & x_3 & & & \text{frei} \\
& & & & & & & x_4 & \geq 0
\end{array}\right.
$$

Bringe das LP auf folgende Formen:

a) $\max c^T x$, s. t. $Ax \leq b$, x frei

b) $\max \mathbf{0}^T x$, s. t. $Ax \geq b$, x frei, also mit konstanter Zielfunktion. Dabei sei der optimale Zielfunktionswert c_0 von (P) bekannt.

Die Matrizen und Vektoren müssen jeweils nicht explizit angegeben werden, es reicht die Darstellung als Gleichungs- bzw. Ungleichungssystem. **(3+3 Punkte)**

Einschub: Min-Max-LPs *Min-Max-LPs* sind eine spezielle Form von LPs, die aus einer Menge von linearen Funktionen, diejenige mit maximalen Wert minimieren, so dass die Nebenbedingungen eingehalten werden.

Beispiel:

$$
\begin{aligned}
\min \max\{3x_1, 2x_2, -4x_3 + x_1\}& \\
\text{s. t.}\quad& \\
x_1 + x_2 &\leq 10 \\
x_1 &\geq 2 \\
2x_3 - x_2 &\geq 2 \\
x &\geq 0
\end{aligned}
$$

Diese Darstellung ist besonders nützlich, um “Balance”-Restriktionen auszudrücken, wie die folgende Aufgabe veranschaulicht:

Aufgabe 2 (Min-Max-LPs): Ein international tätiger Händler für Backpulver hat verschiedene Kuriere für die Warenlieferung über die Grenze zur Verfügung. Die Regulierungsbehörde für Backpulvereinfuhr hat jedoch enge Beschränkungen für die Einfuhrmenge in das Land gesetzt, so dass die Kuriere sich am Rande der Legalität bewegen.

Mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit wird einer der Kuriere erwischt und muss das Backpulver vernichten. Da Kuriere im Voraus bezahlt werden, geht in diesem Fall das entsprechende Honorar zu Verlust (der Verlust des Backpulvers in diesem Fall soll nicht mit einbezogen werden). Da im Voraus nicht bekannt ist, welcher der Kuriere geschnappt wird, ist das Ziel, den eventuellen Verlust möglichst gleichmäßig auf die Kuriere zu verteilen, also den maximalen Verlust zu minimieren.

Die Honorare und Verkaufspreise der Kuriere sind wie folgt:

- **A** transportiert Backpulver für 100 Euro pro Kilogramm und verkauft es bei erfolgreicher Auslieferung für 200 Euro/kg.
- **B** transportiert Backpulver für 90 Euro/kg und verkauft im Erfolgsfall für 130 Euro/kg.
- **C** transportiert Backpulver für 150 Euro pro Kilogramm und verkauft im Erfolgsfall für 210 Euro/kg.

Abbildung 1: Backpulver

Damit sich der Transport lohnt, soll Kurier A mindestens so viel Backpulver ausliefern, dass er 3.000 Euro Gewinn erwirtschaftet (vorrausgesetzt, er wird nicht geschnappt). Ebenso sollen die Kuriere B und C *in Summe* im Erfolgsfall einen Gewinn von mindestens 3.000 Euro erzeugen. Insgesamt sollen im Planungszeitraum 10.000 Euro an Kuriere ausbezahlt werden.

a) Formuliere das Problem als *Min-Max-LP*, der Form:

$$
\begin{aligned}
&\min \max\{\dots\} \\
&\text{s. t.} \dots \\
&x \geq 0
\end{aligned}
$$

b) Formuliere das Problem um in ein Problem der Form:

$$\begin{aligned} &\min c^T x \\ &\text{s. t. } \ldots \\ &\qquad x \geq 0 \end{aligned}$$

(Hinweis: Dazu musst du genau eine zusätzliche Variable einfügen, Matrix/Vektor-Schreibweise ist nicht notwendig, es reicht die Darstellung als Gleichungs- bzw. Ungleichungssystem.)

(4+3 Punkte)

Aufgabe 3 (Lösungsmengen von LPs): Betrachte ein LP in der Standardform

$$(P) \left\{ \begin{array}{lrcl} \max & c^T x & & \\ \text{s. t.} & Ax & \leq & b \\ & x & \in & \mathbb{R}^m \end{array} \right.$$

mit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Dabei sei $L = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ die Menge der zulässigen Lösungen von (P). Beweise oder widerlege folgende Aussagen:

a) Es gilt immer $L \neq \emptyset$.

b) Wenn $L \neq \emptyset$, dann existiert auch $\max\{c^T x \mid x \in L\}$.

c) Wenn $\max\{c^T x \mid x \in L, x \text{ Basislösung}\}$ existiert, ist es eindeutig.

(1+1+1 Punkte)