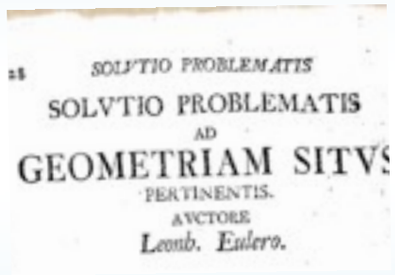
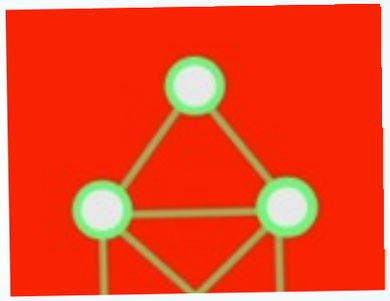


SOLVTIO PROBLEMATIS

SOLVTIO PROBLEMATIS
AD
GEOMETRIAM SITVS
PERTINENTIS.
AVCTORE
Leonh. Eulero.



Kapitel 2.3: Eulerwege

Algorithmen und Datenstrukturen
WS 2012/13

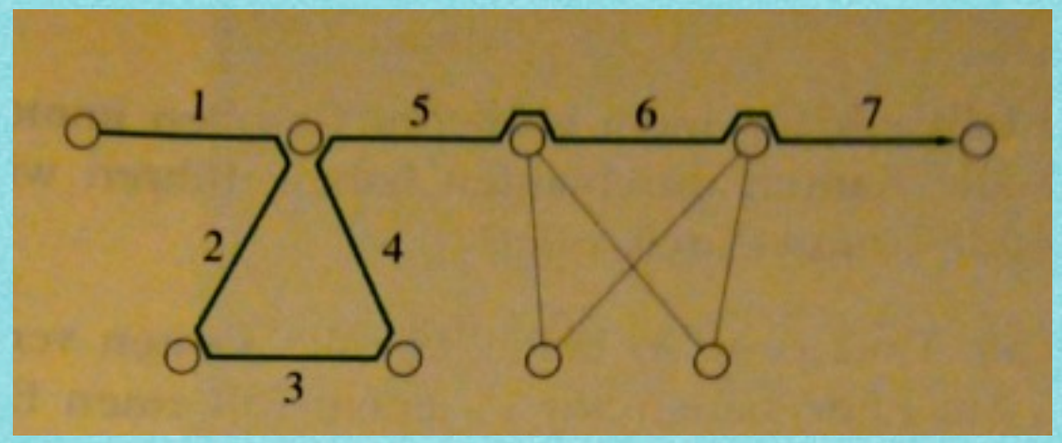
Prof. Dr. Sándor Fekete

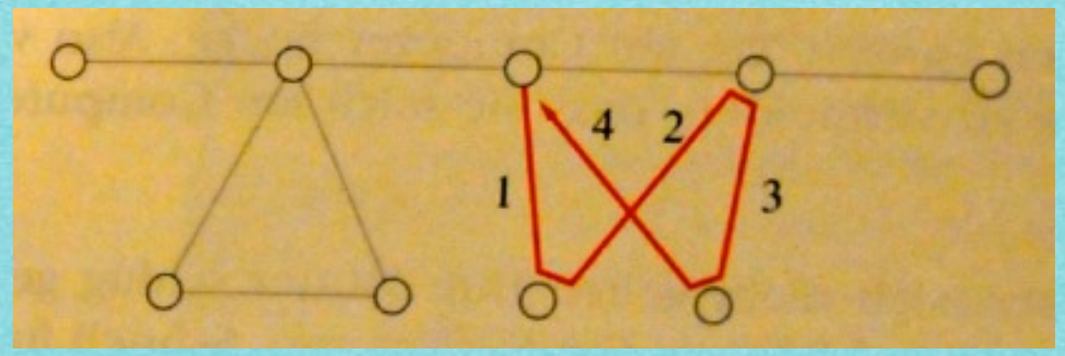
Gestatten, Graph!

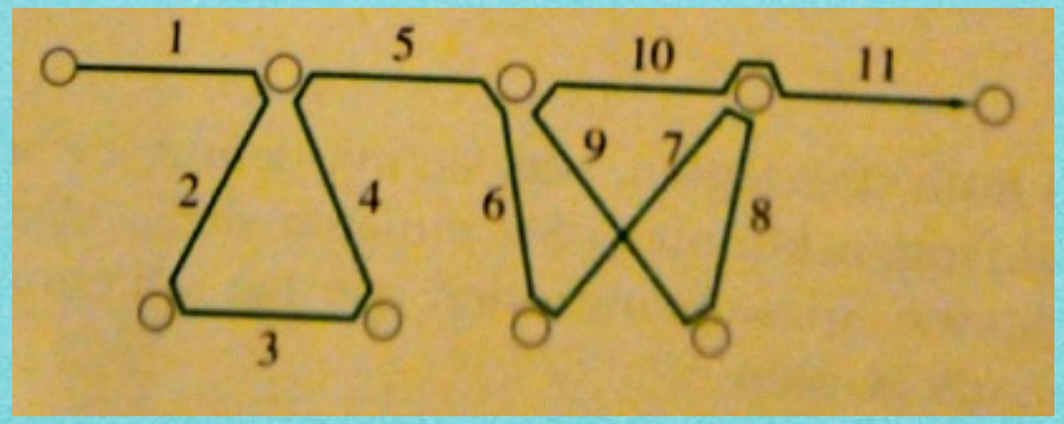
Count

President

"Vorlesung"







Algorithmus 2.8

<u>INPUT:</u> Ein zusammenhängender Graph G mit höchstens zwei ungeraden Knoten

<u>OUTPUT:</u> Ein Eulerweg bzw. eine Eulertour in G

A. Wähle einen Startknoten v (ungerade falls vorhanden);

B. Verwende Algorithmus 2.7, um einen Weg W von v aus zu bestimmen;

C. Solange es noch unbenutzte Kanten gibt:

   C.1. Wähle einen von W besuchten Knoten w mit positivem Grad im Restgraphen;

   C.2. Verwende Algorithmus 2.7, um einen Weg W' von w aus zu bestimmen;

   C.3. Verschmelze W und W'

D. STOP

2.3 Eulerwege

Satz 2.12

(i) ***Das Verfahren 2.8 ist endlich***

(ii) ***Alle Schritte lassen sich korrekt ausführen.***

(iii) ***Algorithmus 2.8 liefert einen Eulerweg bzw. eine Eulertour.***

Beweis:

(i) **Wie gehabt: Es gibt nur endlich viele Kanten, also muss das Verfahren irgendwann stoppen.**

Algorithmus 2.8

INPUT: Ein zusammenhängender Graph G mit höchstens zwei ungeraden Knoten

OUTPUT: Ein Eulerweg bzw. eine Eulertour in G

A. Wähle einen Startknoten v (ungerade falls vorhanden);

B. Verwende Algorithmus 2.7, um einen Weg W von v aus zu bestimmen;

C. Solange es noch unbenutzte Kanten gibt:

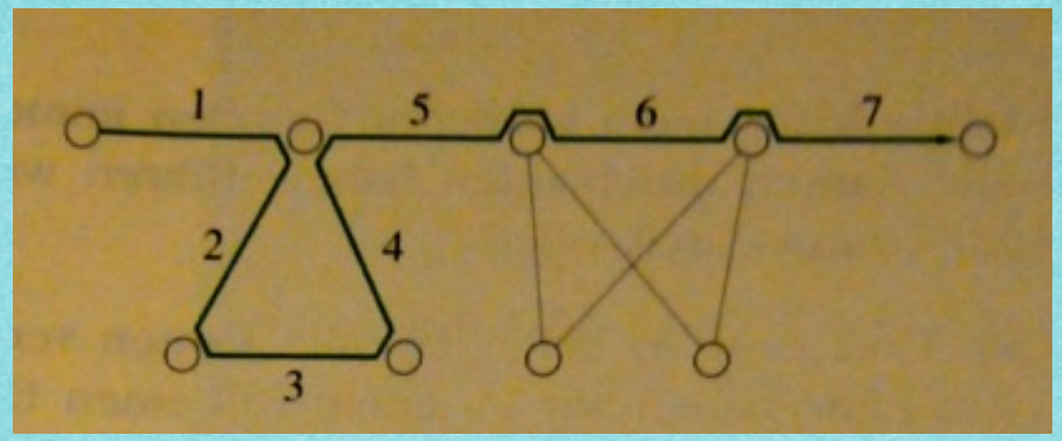
   C.1. Wähle einen von W besuchten Knoten w mit positivem Grad im Restgraphen;

   C.2. Verwende Algorithmus 2.7, um einen Weg W' von w aus zu bestimmen;

   C.3. Verschmelze W und W'

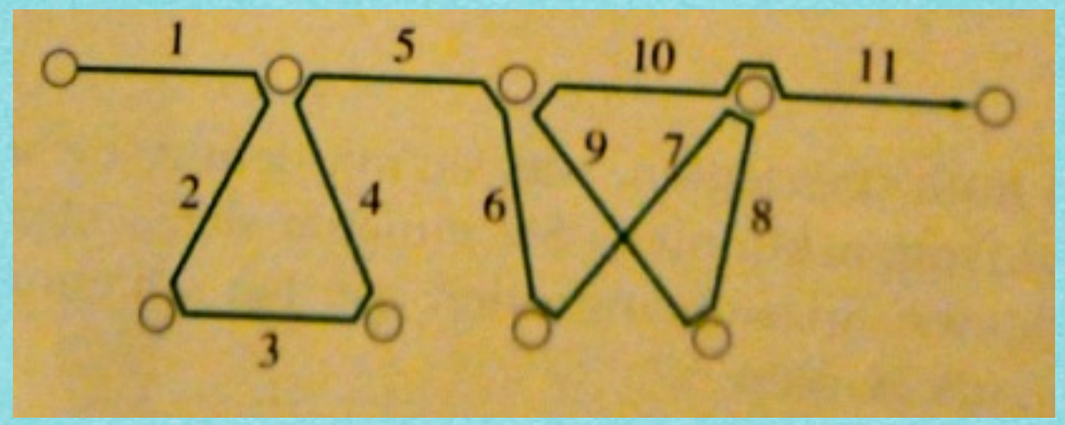
D. STOP

(Beweis Satz 2.12, (ii))



(ii) **Solange es noch unbenutzte Kanten gibt, kann man diese auch von den benutzten Kanten aus besuchen:**
Weil G zusammenhängend ist, muss es einen Knoten geben, der sowohl zu einer benutzten als auch zu einer unbenutzten Kante inzident ist.

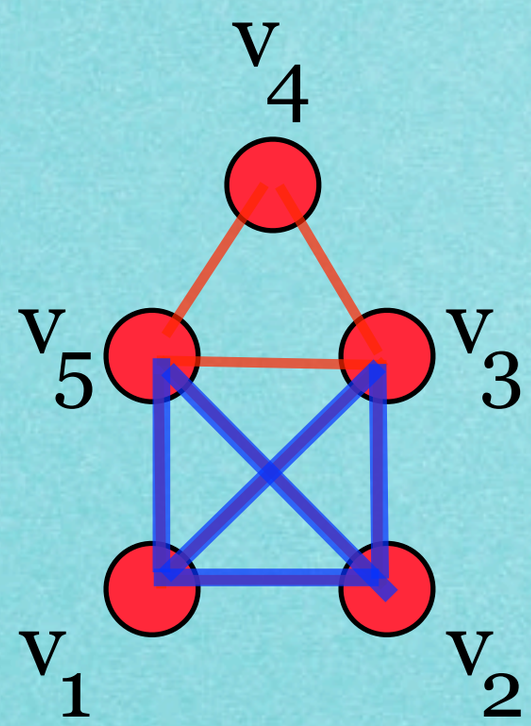
(Beweis Satz 2.12, (iii))



(iii) **Am Ende haben wir einen Weg und es gibt keine unbenutzten Kanten mehr!**

2.3 Eulerwege

Es geht auch anders!



Wir hinterlassen Kanten?!

Algorithmus 2.13 (Fleury)

INPUT: Graph G mit höchstens zwei ungeraden Knoten

OUTPUT: Ein Weg in G.

1. Starte in einem Knoten v_0 (ungerade, sonst beliebig);
2. Solange es eine zum gegenwärtigen Knoten v_i inzidente unbenutzte Kante $\{v_i, v_j\}$ gibt:

   2.1. Wähle eine dieser Kanten aus, $e_i = \{v_i, v_j\}$ der den Restgraphen zshgd. lässt

   2.2. Laufe zum Nachbarknoten v_j

   2.3. Lösche die Kante aus der Liste der unbenutzten Knoten.

   2.4. Setze $v_{i+1} := v_j$

   2.5. Setze $i := i+1$
3. STOP

Satz 2.14

(i) ***Das Verfahren 2.13 ist endlich***

(ii) ***Alle Schritte lassen sich korrekt ausführen.***

(iii) ***Algorithmus 2.13 liefert einen Eulerweg bzw. eine Eulertour.***

Beweis:

(i) **Wie gehabt! Es gibt nur endlich viele Kanten, also muss das Verfahren irgendwann stoppen.**

Algorithmus 2.13 (Fleury)

INPUT: Graph G mit höchstens zwei ungeraden Knoten

OUTPUT: Ein Weg in G.

1. Starte in einem Knoten v_0 (ungerade, sonst beliebig);
2. Solange es eine zum gegenwärtigen Knoten v_i inzidente unbenutzte Kante $\{v_i, v_j\}$ gibt:

   2.1. Wähle eine dieser Kanten aus, $e_i = \{v_i, v_j\}$, der den Restgraphen zshgd. lässt

   2.2. Laufe zum Nachbarknoten v_j

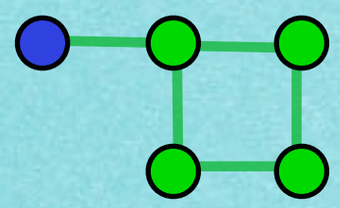
   2.3. Lösche die Kante aus der Liste der unbenutzten Knoten.

   2.4. Setze $v_{i+1} := v_j$

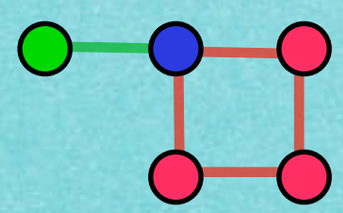
   2.5. Setze $i := i+1$
3. STOP

(Beweis Satz 2.14, (ii))

(ii) **Kritisch ist 2.1. Wenn es nur eine Kante gibt, um den aktuellen Knoten zu verlassen, bleibt der Restgraph nach deren Benutzung zusammenhängend.**



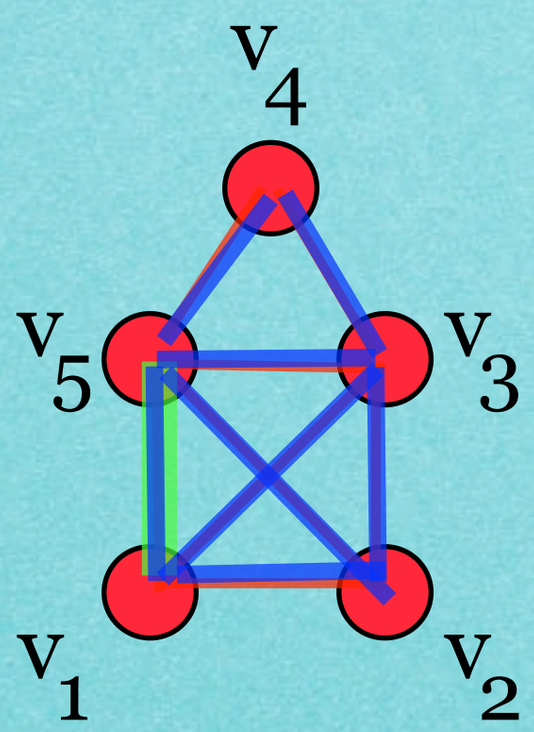
Wenn es mehr als eine Kante gibt, um den aktuellen Knoten zu verlassen, von denen eine bei Entfernen den Graphen unzusammenhängend macht, sind alle anderen Kanten in geschlossenenen Wegen enthalten.



Also wählt man eine der anderen.

(Beweis Satz 2.12, (iii))

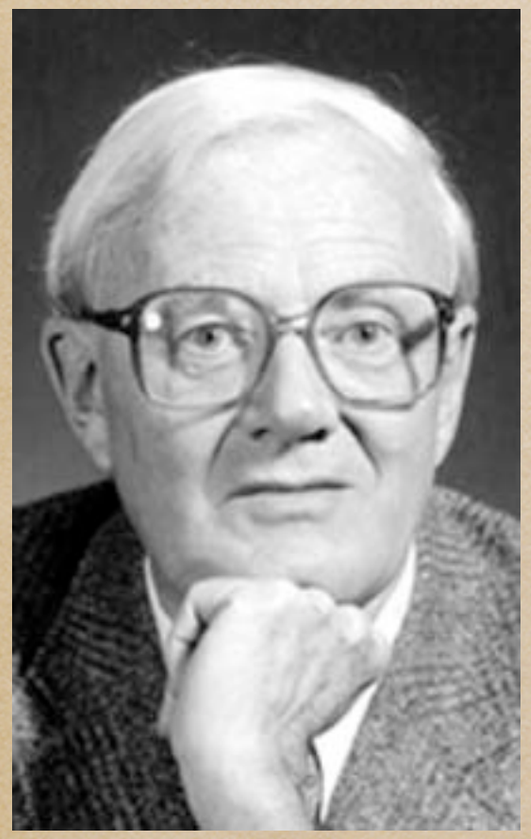
(iii) **Nach Konstruktion bekommen wir einen Weg. Man hat immer einen zusammenhängenden Graphen, kann also keine Kanten zurücklassen.**



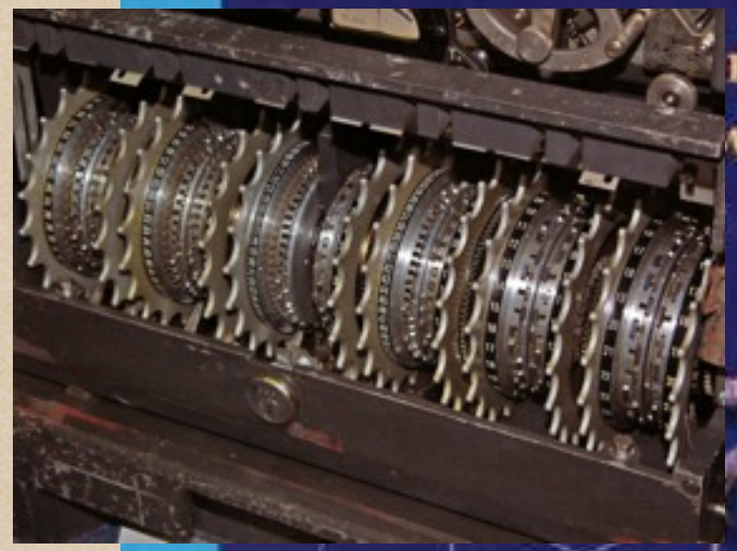
Wir hinterlassen keine Kanten!

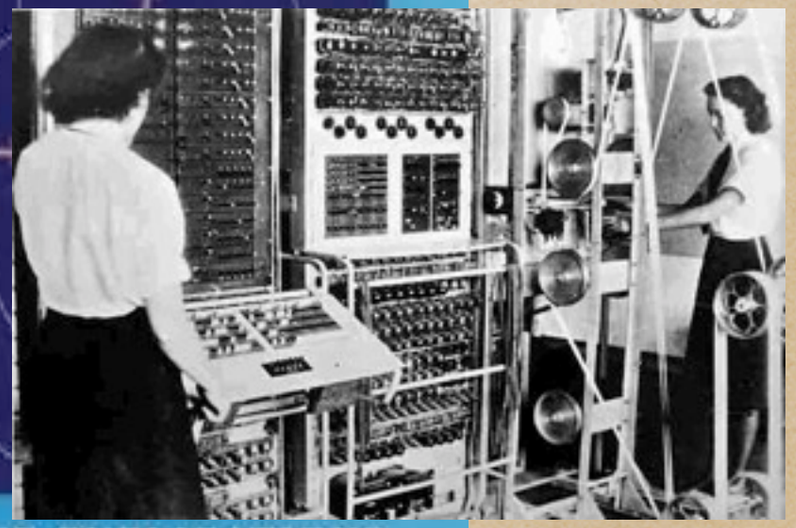
2.4 Schlusswort

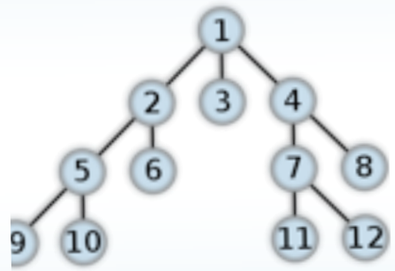
As a young mathematician and codebreaker, he deciphered a series of German military encryption codes known as FISH. This has been described as one of the greatest intellectual feats of World War II.



Bill Tutte, 1917-2002







Kapitel 3: Suche in Graphen

Algorithmen und Datenstrukturen
WS 2012/13

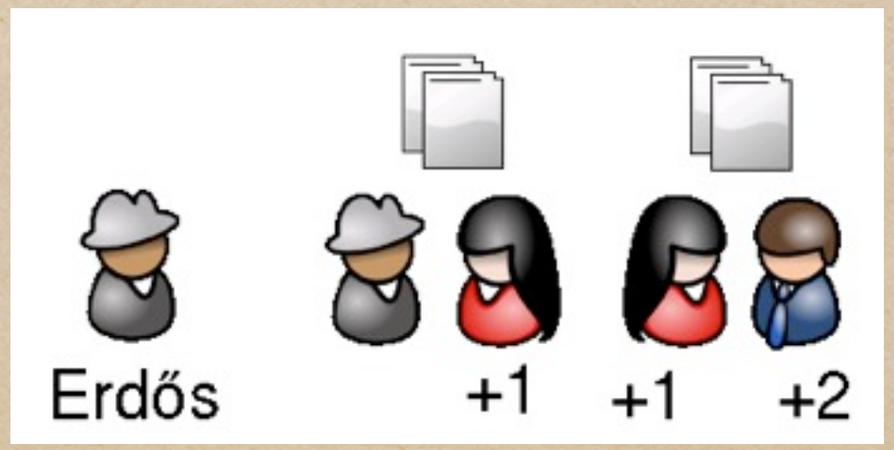
Prof. Dr. Sándor Fekete

3.1 Vorspann

Paul Erdös, 1913-1996

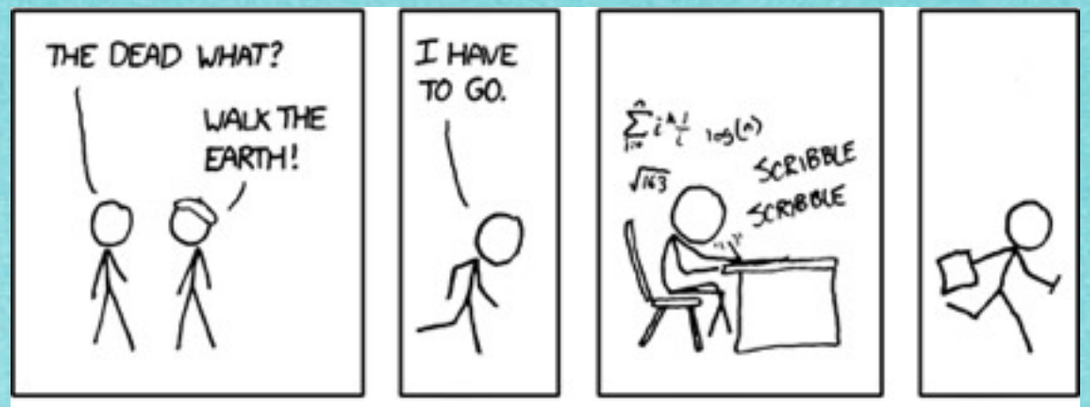
- *Produktivster Mathematiker aller Zeiten (~1500 Artikel)*
- *"Zweitbedeutendster Mathematiker nach Euler"*

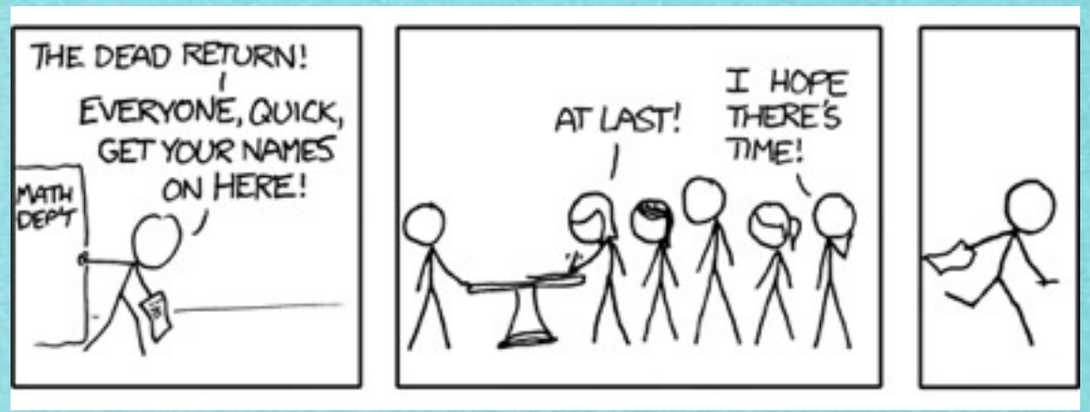
Erdös-Zahl

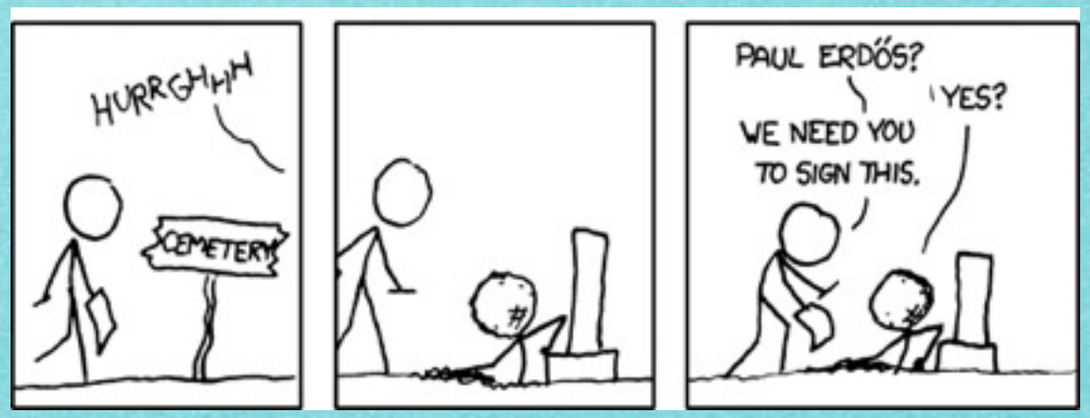


xkcd

A WEBCOMIC OF ROMANCE, SARCASM, MATH, AND LANGUAGE.





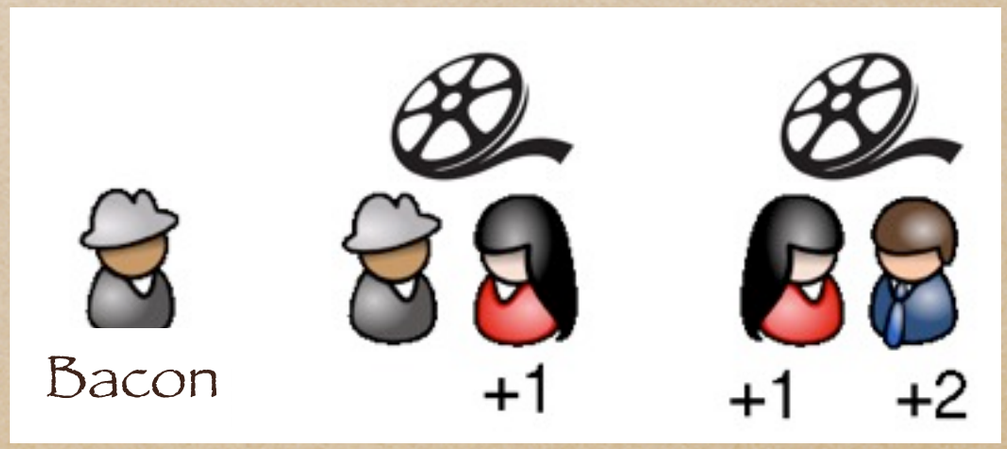


3.1 Vorspann

Kevin Bacon, 1958-

- *Bekannter Hollywood-Schauspieler*

Kevin-Bacon-Zahl



Mehr demnächst!

s.fekete@tu-bs.de