## Beweis von Satz 5.7:

Zunächst runden wir $n$ auf die nächste Zweierpotenz (In O-Notation ändert sich dadurch nichts, $2^{k-1} < n \leq 2^k$, also ändert sich $n$ maximal um einen Faktor 2.)

Wir erhalten also jeweils zwei Subarrays der Größe $\frac{n}{2}$.

Jetzt betrachten wir $T(n)$, die Laufzeit von Mergesort für einen $n$-elementigen Array $A$.

Dann haben wir:

Divide: $O(1)$

Conquer: $2 \cdot T(\frac{n}{2})$

Combine: $O(n)$

Damit ergibt sich folgende Rekursionsbeziehung:

$$T(n) = \begin{cases} O(1), & n = 1 \\ O(1) + 2 \cdot T(\frac{n}{2}) + O(n) = 2T(\frac{n}{2}) + O(n) & \text{für } n \geq 2 \end{cases}$$

Das ist eine „Rekursionsgleichung". (Mehr dazu später!)

Für geeignete Konstanten $c, d$ können wir auch schreiben:

$$T(n) = 2T(\tfrac{n}{2}) + c \cdot n \quad , \quad n \geq 2 \; , \; c \in \mathbb{R}$$

$$T(1) = O(1) = d$$

Nun müssen wir zeigen, dass $T(n) \leq g \cdot n \log n$ für ein geeignetes $g$.

Das zeigen wir per Induktion!

<u>Induktionsanfang:</u>

$n=2$ : $\quad T(2) = 2 \cdot T(1) + c \cdot 2 = 2 \cdot d + 2 \cdot c = 2\,(d+c)$

Außerdem ist $\quad g \cdot \underbrace{n}_{2} \underbrace{\log n}_{1} = 2 \cdot g \overset{!}{\geq} 2 \cdot (d+c)$.

wenn wir $g \geq (d+c)$ wählen (was $g \geq c$ impliziert), dann ist das erfüllt.

<u>Induktionsannahme:</u>

Die Behauptung gelte für $\frac{n}{2} = 2^{k-1}$, d.h.

$$T\left(\frac{n}{2}\right) \leq g \cdot \frac{n}{2} \cdot \log\left(\frac{n}{2}\right)$$

<u>Induktionsschritt:</u> $\quad k-1 \to k$, d.h. von $\frac{n}{2} \to n$ :

$$\begin{aligned}
T(n) &= 2 \cdot T\left(\frac{n}{2}\right) + c \cdot n \\
&\leq 2 \cdot \left(g \cdot \frac{n}{2} \cdot \log\left(\frac{n}{2}\right)\right) + c \cdot n \\
&= g \cdot n \cdot \log\left(\frac{n}{2}\right) + c \cdot n \\
&= g \cdot n \log n \underbrace{- g \cdot n + c \cdot n}_{\leq 0,\ \text{da } g \geq c} \\
&\leq g \cdot n \log n .
\end{aligned}$$

Also ist $\quad T(n) \in O(n \log n)$, wie behauptet.

$\square$

## 5.4 Behandeln von Rekursionen

Welche Möglichkeiten gibt es, Rekursionsgleichungen zu lösen?

### 5.4.1 Substitutionsmethode

Wie gesehen!

(1) Rate eine Lösung.

(2) Beweise die Richtigkeit per Vollständiger Induktion.

Das haben wir im Beweis von SATZ 5. angewendet.

Schwierigkeit: Gute Lösung finden!

(In der Regel ist man an einer möglichst genauen Lösung interessiert – das kann schwer bis unmöglich sein!)

Oft kann man aber Abschätzungen gewinnen, z.B.

$$T(n) \in \Omega(n)$$
$$T(n) \in O(n^2)$$

### 5.4.2 Erzeugende Funktionen

Man kann Rekursionen auch oft lösen, indem man sie in einen abstrakt-formalen Kontext einbettet und die dafür bekannten Rechenregeln anwendet.

Dafür betrachten wir

**DEFINITION 5.8** (Erzeugende Funktion)

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Zahlenfolge mit $a_n \in \mathbb{R}$.

Dann heißt $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$

die (gewöhnliche) erzeugende Funktion von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Beispiel

(a) $a_n = 2a_{n-1}$, $n = 0, 1, 2, \dots$

$a_0 = 1$

$a_1 = 2$, $a_2 = 4$, $a_3 = 8$

$f(x) = 1 \cdot x^0 + 2 \cdot x^1 + 4x^2 + 8x^3 + \dots$

Wir suchen eine „geschlossene Form" für $a_n$, also einen expliziten Ausdruck, um $a_n$ direkt aus $n$ (ohne Rekursion) ausrechnen zu können.

Wir können aufgrund der Rekursion $f(x)$ umformen:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$= a_0 x^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2 \cdot a_{n-1} \cdot x^n$$

$$= a_0 + 2 \cdot x \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}_{f(x)} = a_0 + 2x \cdot f(x)$$

Auflösen nach $f(x)$:

$$f(x) = 1 + 2x f(x)$$

$$\Leftrightarrow f(x)(1-2x) = 1, \quad \text{d.h.} \quad f(x) = \frac{1}{1-2x}$$

Das kann man auch als Reihe schreiben, indem man

$$\sum_{n=0}^{\infty} p^n = \frac{1}{1-p}$$ nutzt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = f(x) = \frac{1}{1-2x} = \sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \cdot x^n$$

Damit Gleichheit gilt, müssen die Koeffizienten gleich sein

$$a_0 = 2^0$$
$$a_1 = 2^1$$
$$\vdots$$
$$a_n = 2^n$$

→ Geschlossene Form!

Das geht natürlich auch für kompliziertere Fälle, die schwerer zu lösen sind!
Oft setzt man dafür auch ein breiteres Arsenal an Umformungen ein, Tabellen von Funktionsentwicklungen, etc.

(Mehr dazu nicht hier ...)