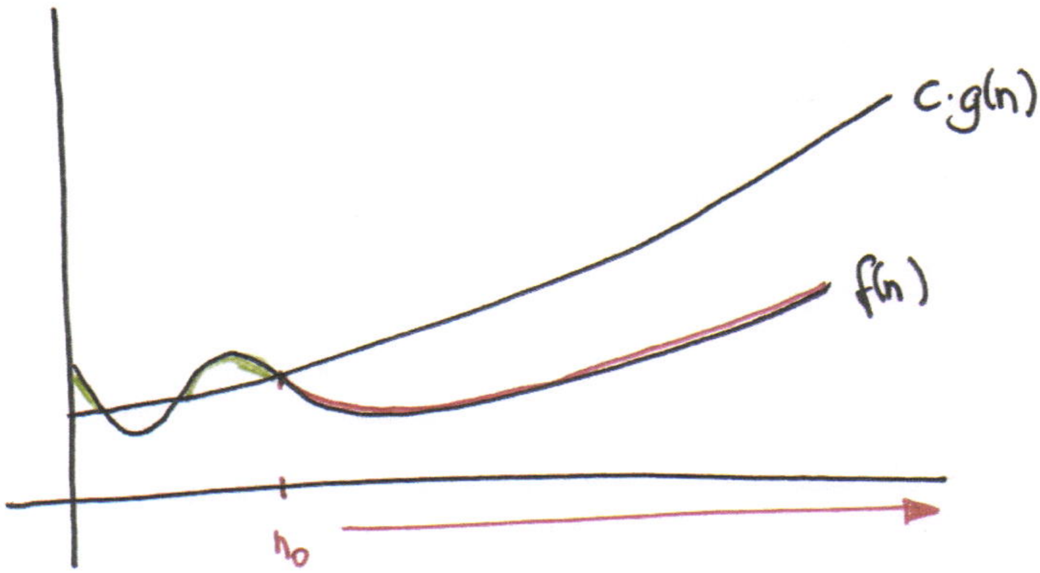
I. Asymptotische Notation

(i) O-Notation „obere Schranke"

$f \in O(g(n)) \Longleftrightarrow$ Es gibt $c > 0$, $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$0 \leq f(n) \leq c \cdot g(n) \quad \forall n \geq n_0$ gilt.

Was soll das?
Man will Aussage über Wachstum von f treffen.
Dabei interessieren „kleine n" nicht so – asymptotisch soll es gelten $\rightsquigarrow$ Abschätzung soll für $\forall n \geq n_0$ gelten



„f wächst nicht schneller als g"

Beispiel:

1. $f(n) = 70n^3 + 125n^2 + 17$
   $g(n) = n^3$

Dann:

II

$$f(n) = 70n^3 + 125n^2 + 17 \underset{n \geq 1}{\leq} 70n^3 + 125n^3 + 17$$

$$\underset{n \geq 1}{\leq} 70n^3 + 125n^3 + 17n^3$$

$$= 212n^3 \underset{\text{für } c=212}{=} c \cdot g(n)$$

Damit:

Für $c = 212$ und $n \geq n_0 = 1$ gilt

$$f(n) \leq c \cdot g(n)$$

Zudem: $f(n) = 70n^3 + 125n^2 + 17 \geq 0$

Also: $0 \leq f(n) \leq c \cdot g(n) \quad \forall n \geq n_0 = 1.$

Anmerkung: c und n_0 sind nicht eindeutig:

$$f(n) = 70n^3 + 125n^2 + 17 \underset{\substack{125n^2 \leq n^3 \\ \Leftrightarrow 125 \leq n}}{\leq} 70n^3 + n^3 + 17$$

$$\underset{n \geq 1}{\leq} 70n^3 + n^3 + 17n^3$$

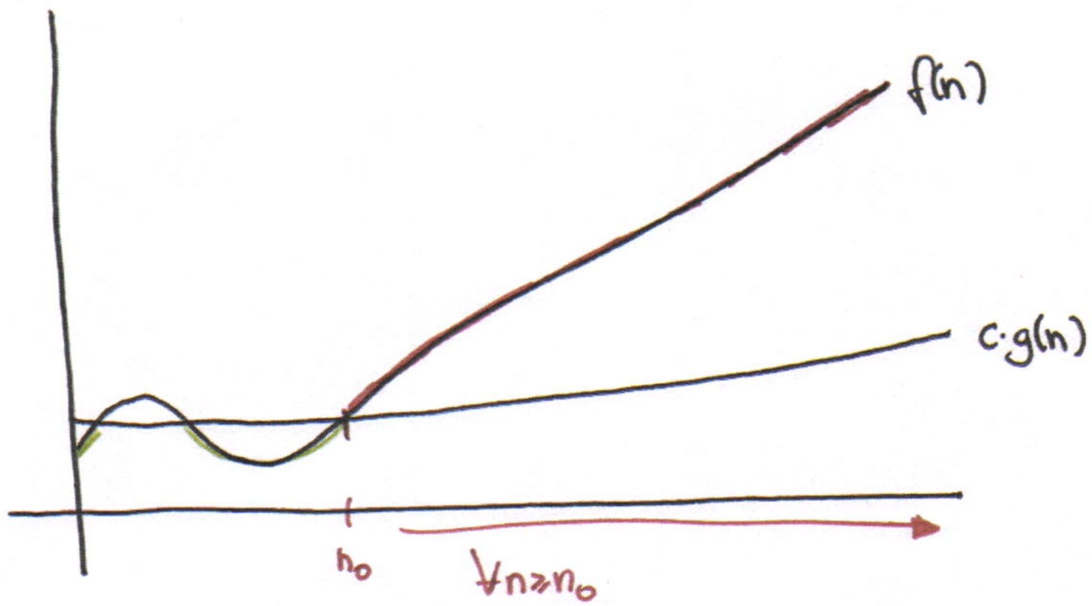
$$= 88n^3 \underset{\text{für } c=88}{=} c \cdot g(n)$$

Also: für $c = 88$ und $n \geq n_0 = 125$ gilt

$$0 \leq f(n) \leq c \cdot g(n)$$

(ii) Ω-Notation „untere Schranke"

$f \in \Omega(g(n)) \Leftrightarrow$ Es gibt $c>0$, $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass
$0 \leq c \cdot g(n) \leq f(n) \quad \forall n \geq n_0$ gilt.



Beispiel:

2. $f(n) = 70n^3 + 125n^2 + 17$
$g(n) = n^3$

Dann:

$$g(n) = 1 \cdot n^3 \underset{n \geq 1}{\leq} 70n^3 \underset{n \geq 1}{\leq} 70n^3 + 125n^2 + 17 = f(n)$$

Damit: Für $c=1$, $n_0=1$ gilt: $c \cdot g(n) \leq f(n) \quad \forall n \geq n_0$

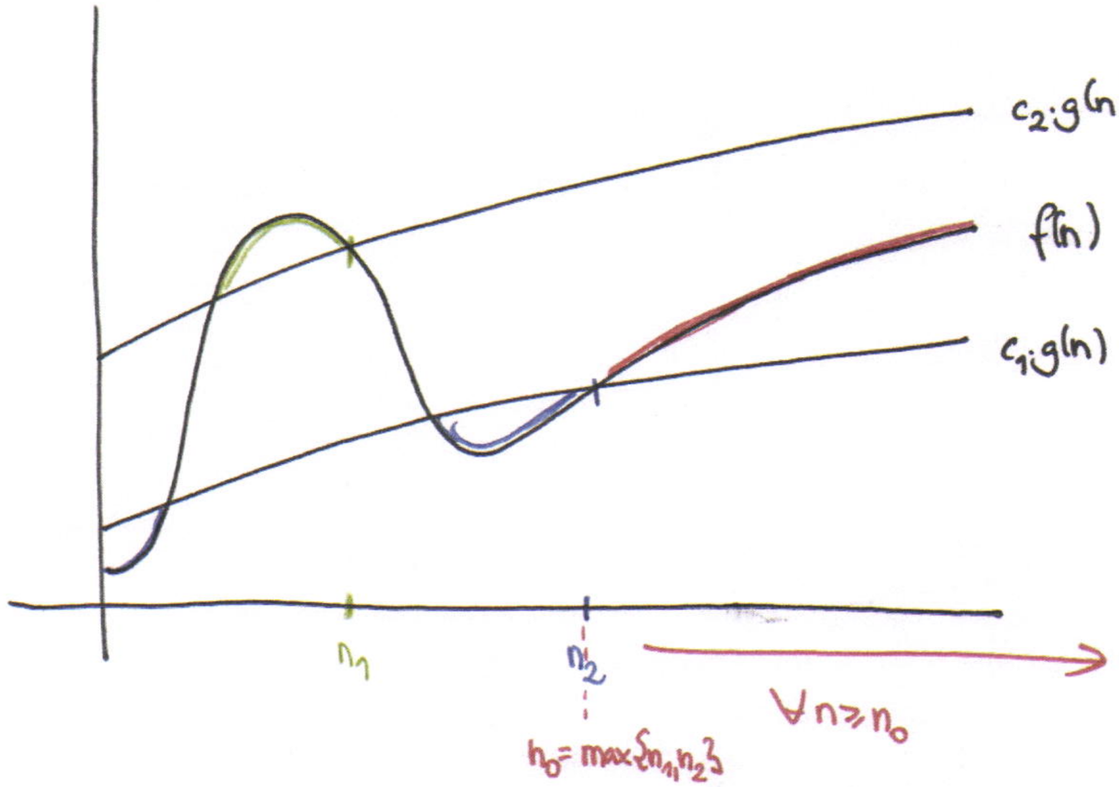
Zudem: $g(n) \geq 0$

Also: $0 \leq c \cdot g(n) \leq f(n)$ für $c=1$, $n \geq n_0 = 1$

(iii) Θ - Notation
„Teta"

$f \in \Theta(g(n)) \Leftrightarrow$ Es gibt $c_1, c_2 > 0$, $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass
$0 \leq c_1 \cdot g(n) \leq f(n) \leq c_2 \cdot g(n) \quad \forall n \geq n_0$ gilt

„f wächst wie g"



Beispiel:

(3.) $f(n) = 70n^3 + 125n^2 + 17$
$g(n) = n^3$

Wie in Beispiel 1 und 2 gezeigt, gilt:

Für $c_1 = 1$ und $c_2 = 212$, sowie $n_0 = 1$

$0 \leq c_1 \cdot g(n) \leq f(n) \leq c_2 \cdot g(n)$

4. $f(n) = 2n^2 - \cancel{80}\ 25$

$g(n) = 4n^2$

(i) $g(n) \geq 0 \quad \forall n \geq 1$

(ii) $f(n) = 2n^2 - \cancel{80}^{25} \underset{n \geq 1}{\leq} 2n^2 \underset{n \geq 1}{\leq} 4n^2 = g(n) \Rightarrow c_2 = 1$

(iii) $f(n) = 2n^2 - 25 \underset{\substack{n^2 \geq 25 \\ n \geq 5}}{\geq} n^2 = \frac{1}{4}(4n^2) = \frac{1}{4} g(n) \Rightarrow c_1 = \frac{1}{4}$

Insgesamt haben wir

$$0 \leq c_1 \cdot g(n) \leq f(n) \leq c_2 \cdot g(n) \quad \forall n \geq n_0$$

für $c_1 = \frac{1}{4}$, $c_2 = 1$, $n_0 = 5$

Also: $f \in \Theta(g(n))$

O-Notation

↳ A1b) Ü3 – Kreuze an, in welchen Klassen die jeweiligen Funktion liegt...

Erstmal: $f(n) \in O(1) \Rightarrow f(n) \in O(n)$ usw. !!

$f(n) \in O(1) \Leftrightarrow \exists c>0, n_0 \in \mathbb{N}: 0 \leq f(n) \leq c \cdot 1 \ \forall n \geq n_0$

Was brauchen wir für $f(n) \in O(n)$

$\exists c_2>0, n_{0_2} \in \mathbb{N}: 0 \leq f(n) \leq c_2 \cdot n \ \forall n \geq n_{0_2}$

Da $c \cdot 1 \leq c_2 \cdot n$ für geeignetes c_2 (z.B. $c_2 = c$) gilt dies.

~~Funk~~ Klassen: $O(1), O(n), O(2^n), \Omega(1), \Omega(n), \Omega(2^n), \Theta(1), \Theta(n), \Theta(2^n)$

- $f(n) = 57$? $O(1), O(n), O(2^n), \Omega(1), \Theta(1)$
- $f(n) = 3n - 51$? $O(n), O(2^n)$
  $\Omega(1), \Omega(n)$
  $\Theta(n)$
- $f(n) = n^2$? $O(2^n)$
  $\Omega(1), \Omega(n)$
- $f(n) = n^n$? $\Omega(1), \Omega(n), \Omega(2^n)$
- $f(n) = n^3$? $O(2^n)$
  $\Omega(1), \Omega(n)$

...