Abteilung Algorithmik
Institut für Betriebssysteme und Rechnerverbund **WS 11/12**
TU Braunschweig

Prof. Dr. Sándor Fekete
Dr. Christiane Schmidt

Algorithmen und Datenstrukturen
Übung 1 vom 16.11.2011

Abgabe der Lösungen am Mittwoch, den 30.11.11, bis 11:25 Uhr vor der Abteilung *Algorithmik*.
Bitte die Blätter vorne deutlich mit eigenem Namen und Gruppennummer versehen!
Achtung: dieses Blatt besteht aus 4 Seiten!

Aufgabe 1 (Sumerisch-babylonisches Wurzelziehen - das Heron-Verfahren):
Die Babylonier entwickelten bereits Verfahren zur Lösung quadratischer Gleichungen, dies geschah im Zusammenhang mit Problemem der Flächenmessung. Die Bestimmung von Quadratwurzeln bildet einen ersten Schritt hin zur Lösung allgemeiner quadratischer Gleichungen. Dieses Verfahren wurde ca. um 100 n.Chr. von den Griechen aufgegriffen und wird häufig als Heron-Verfahren bezeichnet.

Das Problem der Bestimmung von Quadratwurzeln:
Gegeben sei eine Zahl a.
Gesucht ist eine Zahl b, so dass $b \cdot b = a$. (Für uns heißt das natürlich, wir suchen die Quadratwurzel b von a: $b = \sqrt{a}$.)

Wenn man das Problem der Bestimmung von Quadratwurzeln geometrisch betrachtet, bedeutet dies, dass man zu gegebenem a die Seitenlänge b eines Quadrats sucht, dessen Flächeninhalt a entspricht.

Diese geometrische Idee liegt auch dem babylonischen Verfahren zu Grunde. Zudem wendet man das "Prinzip der Bescheidenheit" an: ist man nicht direkt in der Lage das "richtige" Quadrat sofort anzugeben, begnügt man sich zunächst mit weniger - einem Rechteck des Flächeninhalts a. Das kann man einfach konstruieren in dem eine Seitenlänge als 1 (1 LE) und die andere als a gewählt wird. Dummerweise haben wir damit dann aber in der Regel tatsächlich nur ein Rechteck, und eben kein Quadrat. Daher versucht man schrittweise, ausgehend von diesem Ausgangsrechteck, immer "quadrat-ähnlichere" Rechtecke zu konstruieren. Man wählt eine Seite des neuen Rechtecks als das arithmetische Mittel der Seiten des Ausgangsrechtecks und passt die andere Seite so an, dass sich der Flächeninhalt a nicht verändert.
Seien x_0 und y_0 die Seiten des Ausgangsrechtecks. Die Seitenlängen des neuen Rechtecks sind dann:

$$x_1 = \frac{x_0 + y_0}{2}, y_1 = \frac{a}{x_1} \tag{1}$$

Wir fassen den Algorithmus, das Heron-Verfahren, zusammen:
Gegeben: a.
Gesucht: b mit $b = \sqrt{a}$.

(1) Setze $x_0 = a, y_0 = 1$ als Seitenlängen für das Ausgangsrechteck. $i = 0$.

(2) Bestimme die Seitenlängen des $i+1$-ten Rechtecks folgendermaßen:

$$x_{i+1} = \frac{x_i + y_i}{2}, y_{i+1} = \frac{a}{x_{i+1}} \tag{2}$$

Falls $x_{i+1} = y_{i+1}$: $b = x_{i+1}$; STOP.

(3) erhöhe i um 1 und gehe zu (2).

a) Gib eine Formel für x_{i+1} an, die nur noch von x_i abhängt.

b) Sei $a = 5$. Berechne die ersten 6 Rechtecke. Gib jeweils auch die Dezimalwerte der berechneten Seitenlängen an.

c) Gib eine geometrische Darstellung Deiner in b) ermittelten Rechtecke: trage je die x-und y-Werte auf den entsprechenden Achsen ein, und zeichne Deine Rechtecke.

d) Zeige: das Heron-Verfahren liefert die Quadratwurzel. Sei dafür o.B.d.A. $a > 1$. (Hinweis: es reicht hier, den Beweis zu skizzieren.)

e) Hat das Verfahren die Eigenschaften, die Donald Knuth an einen Algorithmus stellt? (Antwort mit Begründung!) Ändert die Einführung eines Abbruchkriteriums der Form "Wenn x_i und y_i in 10 Nachkommastellen übereinstimmen, gib x_i als Näherung an b aus, STOP" Deine Antwort?

(2+9+2+8+4 Punkte)

Aufgabe 2 (Eulerweg):

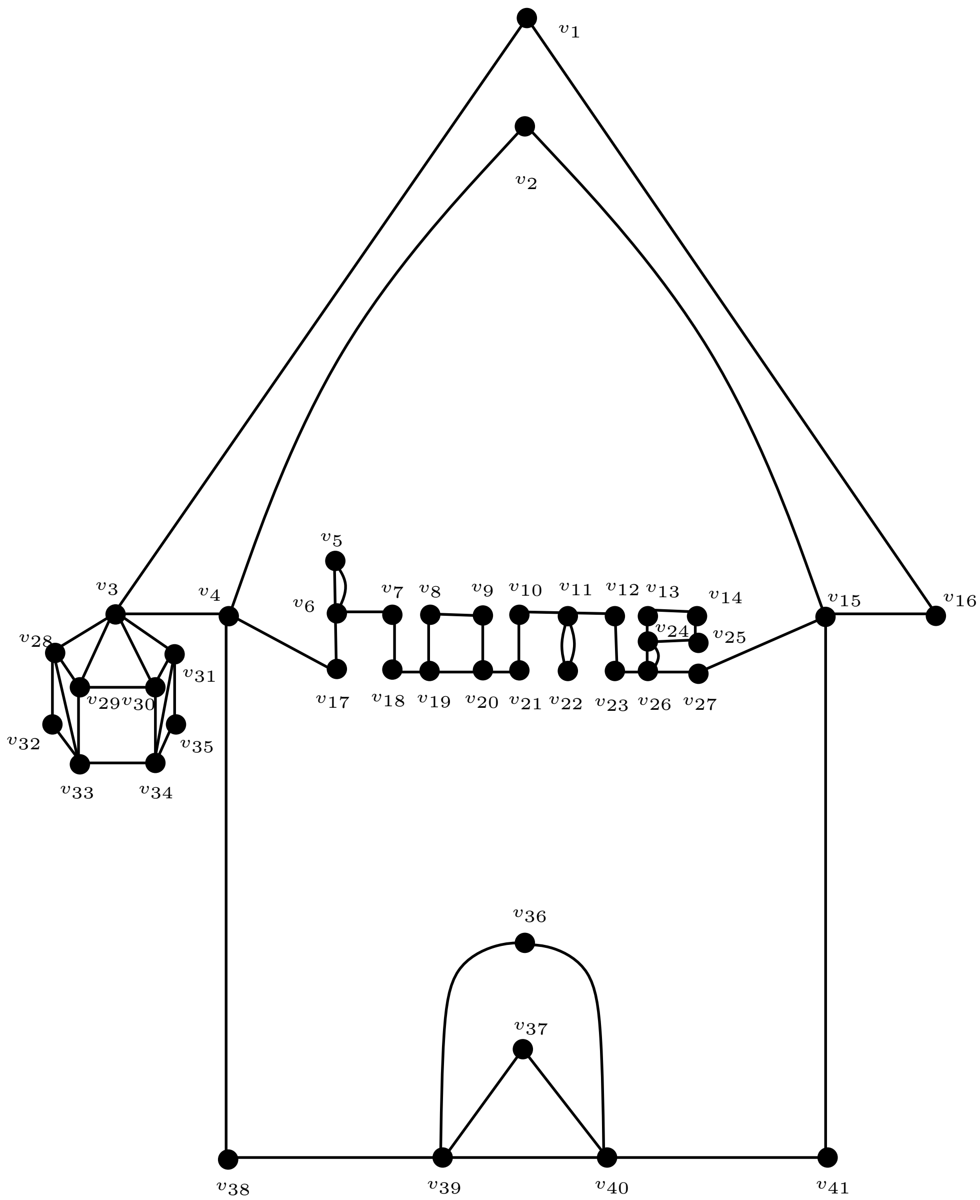

Abbildung 1: Euler auf dem Weg nach Hause!

Finde im Graphen in Abbildung 1 einen Eulerweg oder zeige, dass es keinen gibt.

(15 Punkte)

Aufgabe 3 (Graphen):

Wie in der Vorlesung beschrieben enthält jede Kante eines einfachen Graphen zwei Knoten. Darauf aufbauend bezeichnet man als *Grad eines Knotens* v die Anzahl der Kanten, die v enthalten. Der Grad eines Knotens v (englisch "degree") wird mit $\delta(v)$ abgekürzt. Ein Graph heißt *vollständig*, wenn es zwischen je zwei Knoten eine Kante gibt, d. h. alle möglichen Verbindungen auch vorhanden sind.

a) Zeichne einen beliebigen Graphen mit $n \geq 5$ Knoten $v_1, \ldots, v_n$ und $m \geq 10$ Kanten $e_1, \ldots, e_m$. Überprüfe, ob $\sum_{i=1}^{n} \delta(v_i) = 2m$ gilt.

b) Beweise, dass $\sum_{i=1}^{n} \delta(v_i) = 2m$ für *jeden* Graphen G mit n Knoten und m Kanten gilt.

c) Sei H ein vollständiger Graph mit n Knoten. Zeige, dass für H die Zahl der Kanten genau $\frac{n}{2}(n-1)$ beträgt.

(4+8+8 Punkte)