I. Orga
II. Quicksort
III. Hashing

I. Orga

- Klausur 21.2., 15.30 – 17.30
- Raumeinteilung ⟶ siehe HP + mail!
  (Audimax, Bunker, Pk 2.1+2.2)
- Hilfsmittel ⟶ keine
- mitzubringen: I-Bescheinigung
  Perso

Denkt dran HA abzuholen (Listen gehen an PAs)

- HA: 15.2. 15 – 16.00 IZ 313
  16.2. 16. – 16.15 —"—
- Sprechstunde: 16.2. 15 – 16.00 IZ 316

Quicksort(A,p,r):

```
if (p < r) then
    q ← Partition(A, p, r);
    Quicksort(A, p, q − 1);
    Quicksort(A, q + 1, r);
end
```

Partition(A,p,r):

```
x ← A[r];
i ← p − 1;
for (j ← p to r − 1) do
    if (A[j] ≤ x) then
        i ← i + 1;
        tausche A[i] ↔ A[j]
    end
end
tausche A[i + 1] ↔ A[r];
return i + 1;
```

II. Quicksort

- divide-and-conquer wie mergesort
- Idee: sortiere die (im Bezug auf Referenzelement) „kleinen" Elemente nach vorne
- $A[p \dots r] \rightarrow$ zwei (ggf leere) Teilfelder

$$\underbrace{A[p \dots q-1]}_{\substack{\text{jedes Element} \\ \leq A[q]}} \quad \underbrace{A[q+1 \dots r]}_{\substack{\text{jedes Element} \\ \geq A[q]}}$$

Die dann je durch rekursive Aufrufe von Quicksort sortieren

- dabei $x = A[r]$ Pivotelement
- Während PARTITION Feld in 4 (ggf. leere) Regionen:
  - $\boxed{\text{Elemente} \leq x}$ $(p \leq k \leq i : A[k] \leq x)$
  - $\boxed{\text{Elemente} \geq x}$ $(i+1 \leq k \leq j-1 : A[k] \geq x)$
  - $\boxed{\text{noch nicht einsortierte Elemente}}$
  - das Pivotelement $(k = r : A[k] = x)$

Beispiel:

III

i	p, j							r
2	8	7	1	3	5	6	4	

$A[1] \leq 4$, $i = i+1$ $(=1)$
tausche $A[1]$ mit sich selbst

p, i	j							r
2	8	7	1	3	5	6	4	

p, i		j						r
2	8	7	1	3	5	6	4	

p, i			j					r
2	8	7	1	3	5	6	4	

$A[j] = 1 \leq 4$, $i = i+1$ $(=2)$
↳ tausche $A[i] = A[2] = 8$
und $A[j] = 1$

p	i			j				r
2	1	7	8	3	5	6	4	

$A[j] = 3 \leq 4$, $i = i+1$ $(=3$
↳ tausche $A[3] \leftrightarrow A[5]$

p		i			j			r
2	1	3	8	7	5	6	4	

p		i				j		r
2	1	3	8	7	5	6	4	

p		i						r
2	1	3	8	7	5	6	4	

tausche $A[i+1] \leftrightarrow A[r]$
$A[4] \leftrightarrow A[8]$

2	1	3	4	7	5	6	8

alle $\leq$ $A[q]$ alle $\geq$

return 4

Bsp. 2:

A	8	7	3	6
	A[1]	A[2]	A[3]	A[4]

Quicksort (A, 1, 4)

$q \leftarrow$ Partition(A, 1, 4)

$x = A[4] = 6$

$i = 0$

$j=1$: $A[1] \nleq x$ ✓

$j=2$: $A[2] \nleq x$ ✓

$j=3$: $A[3] = 3 \leq 6$

$i = 1$

tausche $A[1] \Leftrightarrow A[3] \rightarrow$ 3 7 8 6

~~→ return~~

(Zeile 9) tausche $A[i+1] = A[2] \Leftrightarrow A[4] \rightarrow$ 3 | 6 | 8 7

$\leq A[q]$ $\geq$

$q = 2$

Quicksort (A, 1, 1)

↳ IF-Bedingung nicht erfüllt ($1 \nless 1$)

Quicksort (A, 3, 4)

$q \leftarrow$ Partition (A, 3, 4)

$x = 7$ ($= A[4]$)

$i = 2$

$j=3$: $A[3] = 8 \nleq 7$ ✓ (Schleife zu Ende)

(Zeile 9) tausche $A[i+1] = A[3] \Leftrightarrow A[4]$

$\rightarrow$ 3 6 | 7 | 8

Ref $\geq$

$q = 3$

Quicksort (A, 3, 2) → IF-Bed. nicht erfüllt

Quicksort (A, 4, 4) → —— // ——

also, Ausgabe: 3 6 7 8

III Hashing

- mit verketteten Listen
- mit offener Adressierung

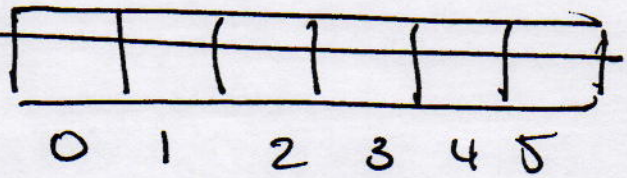
[zur Kollisionsbehandlung]

→ Hashfunktion mit „Zähler" – Nummer des Einfügeversuchs als Parameter

$t(i,x)$ = Position des i-ten Versuchs zum Einfügen von Daten x

~~Beispiel:~~

~~Schlüssel: 1, 7, 16~~



~~$t(i,x) = (x+i) \bmod 6$~~

→ Division mit Rest / Modulorechnung

zu zwei Zahlen $a, b \in \mathbb{N}$

$$a = c \cdot b + r \quad , r \in \{0, \dots, b-1\}$$

↑ Rest

$$(a \bmod b) = r$$

Beispiel:

$21 \bmod 4 = 1$, denn $21 = 5 \cdot 4 + 1$

Beispiel:

Schlüssel: 1, 7, 19

0	1	2	3	4	5
	1	7	19		

$t(i,x) = (x+i) \bmod 6$ $\quad i=0,1,\ldots$

$t(0,1) = 1$

$t(0,7) = 1$ Kollision

$t(1,7) = 2$

$t(0,19) = 1$ Kollision

$t(1,19) = 2$ Kollision

$t(2,19) = 3$

Klausuraufgabe WS 07/08

$t(i,x) = (x+i) \bmod 12$

$A[0], A[1], \ldots, A[11]$

Schlüssel: 17, 41, 6, 5, 18

x=17:

i=0: $t(0,17) = 5$ $\quad 17 \rightarrow A[5]$

x=41:

i=0: $t(0,41) = 5$ Kollision

i=1: $t(1,41) = 6$ $\quad 41 \rightarrow A[6]$

x=6:

i=0: $t(0,6) = 6$ Kollision

i=1: $t(1,6) = 7$ $\quad 6 \rightarrow A[7]$

x=5:

i=0: $t(0,5) = 5$ Kollision

i=1: $t(1,5) = 6$ Kollision

$i=2$: $t(2,5)=7$ Kollision

$i=3$: $t(3,5)=8$ $5 \longrightarrow A[8]$

VII

<u>$x=18$:</u>

$i=0$: $t(0,18)=6$ Kollision

$i=1$: $t(1,18)=7$ Kollision

$i=2$: $t(2,18)=8$ Kollision

$i=3$: $t(3,18)=9$ $18 \longrightarrow A[9]$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
					17	41	6	5	18		

SoSe 2010

5.Aufgabe: Hashing **11 Punkte**

Wir betrachten ein leeres Array A der Größe 9, d.h. es gibt die Speicherzellen $A[0], A[1], \ldots, A[8]$; in diesem führen wir offenes Hashing mit der folgenden Hashfunktion durch:

$$t(i, x) = (2x + i^2) \bmod 9$$

Dabei ist x ein einzusetzender Schlüssel und i die Nummer des Versuches, x in eine unbesetzte Speicherzelle des Arrays zu schreiben (beginnend bei $i = 0$).
Berechne zu jedem der folgenden Schlüssel die Position, die er in A bekommt:

$$5, 23, 20, 18, 7$$

(Hinweis: Die Schlüssel sollen in der gegebenen Reihenfolge eingefügt werden und der Rechenweg sollte klar erkennbar sein.)

Trage die Elemente in folgendes Array ein:

0	18
1	5
2	23
3	
4	20
5	7
6	
7	27
8	

luseA(5): $t(0,5) = 10 \bmod 9 = 1$ frei
luseA(23): $t(0,23) = 46 \bmod 9 = 1$ Kollision
$t(1,23) = 47 \bmod 9 = 2$ frei
luseA(20): $t(0,20) = 40 \bmod 9 = 4$ frei
luseA(18): $t(0,18) = 36 \bmod 9 = 0$ frei
luseA(7): $t(0,7) = 14 \bmod 9 = 5$ frei

z.B. noch

luseA(27): $t(0,27) = 54 \bmod 9 = 0$ Kollision
$t(1,27) = 55 \bmod 9 = 1$ Kollision
$t(2,27) = 58 \bmod 9 = 4$ Kollision
$t(3,27) = 63 \bmod 9 = 0$ Kollision
$t(4,27) = 70 \bmod 9 = 7$ frei

$f \in \Omega(g)$: $\exists c_0 > 0, n_0 \in \mathbb{N}: 0 \leq c_0 \cdot g(n) \leq f(n) \ \forall n \geq n_0$

$g \in \Theta(h)$: $\exists c_1, c_2 > 0, n_1 \in \mathbb{N}: 0 \leq c_1 \cdot h(n) \leq g(n) \leq c_2 \cdot h(n)$ $\forall n \geq n_1$

3.Aufgabe: Komplexität **3+3+3+3 Punkte**

Seien $f, g, h : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}$ drei Funktionen. Sei $f \in \Omega(g)$ und $g \in \Theta(h)$.

a) Zeige oder widerlege: $f \in O(h)$

$f \in O(h) \Leftrightarrow \exists c_3 > 0, n_3 \in \mathbb{N}: 0 \leq f(n) \leq c_3 \cdot h(n) \ \forall n \geq n_3$

widerlege:

$f(n) = n^2$

$g(n) = n$

$h(n) = n$

$n^2 \nleq c \cdot n$ für konstante c und $n \geq n_3$, für bel. $n_3 \in \mathbb{N}$

b) Zeige oder widerlege: $f \in \Theta(h)$

siehe a) ($f \notin O(h)$!)

Zeig oder widerlege: $g \in O(f)$

$g \in O(f) \Leftrightarrow \exists c_4 > 0, n_4 \in \mathbb{N}: 0 \leq g(n) \leq c_4 \cdot f(n)$

$f \in \Omega(g) \Rightarrow \exists c_0 > 0, n_0 \in \mathbb{N}: 0 \leq c_0 g(n) \leq f(n) \ \forall n \geq n_0$

wähle $c_4 = \frac{1}{c_0} \geq 0$, $n_4 := n_0$, dann gilt:

$0 \leq g(n) \leq c_4 \cdot f(n) \ \forall n \geq n_0$