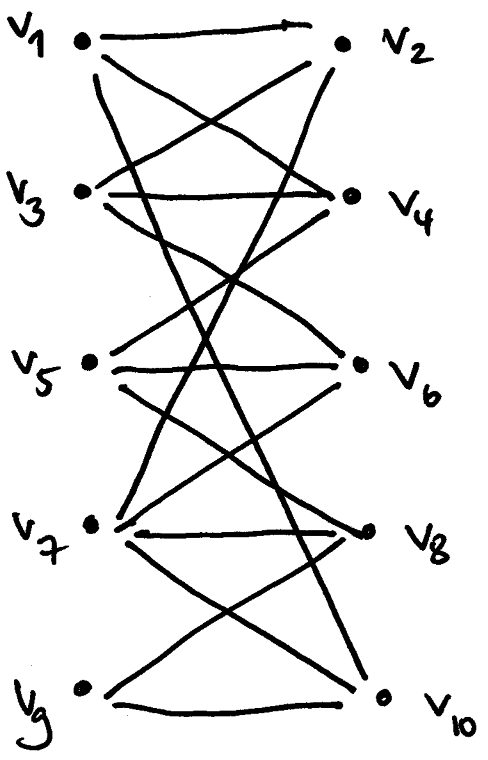
Große Übung #2
17.11.11

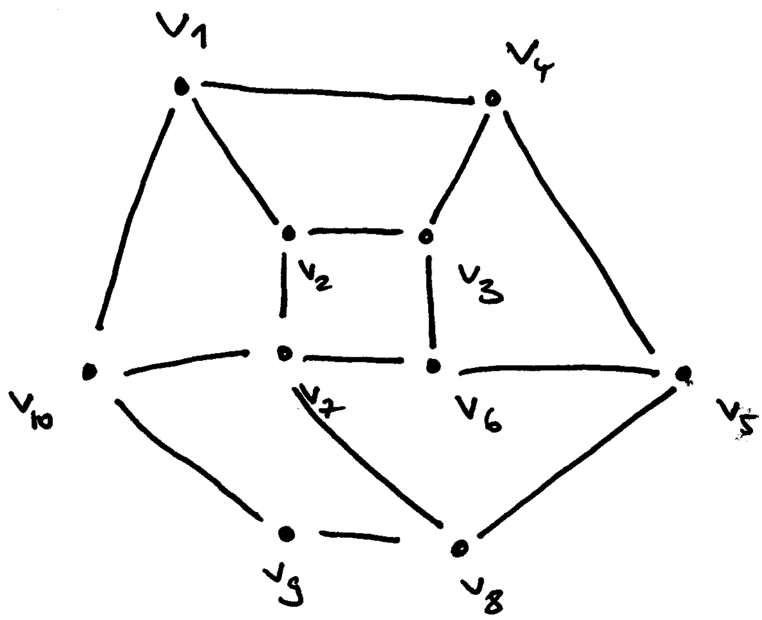
I. Graphen

II. Beweistechniken

I. Graphen



G_1



G_2

Sind G_1 und G_2 gleich? Ja!

- Einbettung ist unterschiedlich
  $\Rightarrow$ gleicher Graph kann sehr unterschiedlich aussehen

Für G_1, G_2:

- Knotenmenge: $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}\}$
  $n = |V| = 10$
- Kantenmenge: $E = \{e_{1,2}; e_{1,4}; e_{1,10}; e_{2,3}; e_{2,7}; \dots\}$
  $m = |E| = 15$
- keine parallelen Kanten, keine Schleifen $\rightarrow$ einfach!
- adjazent zu v_7: v_2, v_6, v_8, v_{10}
- inzident zu v_7: $e_{2,7}; e_{6,7}; e_{7,8}; e_{7,10}$
- Grad von v_7: $\delta(v_7) = 4$
- Teilgraph $H = (V, \{e_{1,2}; e_{2,3}; e_{3,6}; e_{2,7}; e_{3,4}; e_{5,6}; e_{7,8}; e_{8,9}; e_{9,10}\})$
  ist aufspannend
- Kantenfolge: $v_2; e_{2,3}; v_3; e_{3,6}; v_6; e_{6,7}; v_7; e_{7,2}; v_2; e_{2,3}; v_3; e_{3,4}; v_4$
  $\uparrow$ kein Weg! ($e_{2,3}$ zweimal)
- Weg: $e_{2,3}; e_{3,6}; e_{6,7}; e_{7,2}; e_{2,1}$
  $\uparrow$ kein Pfad! (v_2 doppelt!)
- Pfad: $e_{1,2}; e_{2,3}; e_{3,6}; e_{6,5}; e_{5,8}; e_{8,9}; e_{9,10}$
- Kreis: ——— // ——— ; $e_{10,1}$
- Eulerweg? (alle Kanten!) — gibt es nicht! (max. 2 Knoten ungeraden Grad)

- Eulertour? – gibt es nicht!
- Hamiltonpfad: $e_{1,2}$; $e_{2,3}$; $e_{3,4}$; $e_{4,5}$; $e_{5,6}$; $e_{6,7}$; $e_{7,8}$; $e_{8,9}$; $e_{9,10}$
- Hamiltonkreis: —— // —— ; $e_{10,1}$
- Graph ist zusammenhängend

II. Beweistechniken

1.) Direkter Beweis
2.) Indirekter Beweis, Beweis durch Widerspruch
3.) Vollständige Induktion

} i.d.R. mehrere Möglichkeiten

Betrachte Aufgabenstellung:

- „beweise", „zeige", „begründe" → Aussage gilt
- „beweise oder widerlege" → nicht klar, ob Aussage gilt

WICHTIG!!

Durch Angabe eines Beispiels kann man nichts beweisen, aber durch Angabe eines (Gegen-)Beispiels kann man eine Aussage widerlegen!!

→ Äpfel:

Aussage: „Alle Äpfel (auf unserer Erde) sind grün"

1.) Direkter Beweis

z.z.: $A \Rightarrow B$

(A gilt, (Schritt für Schritt) sol daraus B gefolgt werden)

Beispiel:

z.z.: $$\underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}}_{A} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n+1}{n+2}}_{B}$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

A gilt!

$$\overset{A}{=} \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{(n+1)^2}{\cancel{(n+1)}(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}$$

$\square$

2.) Indirekter Beweis

„Zeige $A \Rightarrow B$" ist gleiche Aufforderung, wie "Widerlege A und (nicht B)"
$[A \wedge (\neg B)]$

Wieso?
↳ betrachte Wahrheitstafel

A : Aussage A
$\neg A$: „nicht A"

A	B	$\neg B$	$A \wedge (\neg B)$	$\neg(A \wedge (\neg B))$	$A \Rightarrow B$
w	w	f	f	w	w
w	f	w	w	f	f
f	w	f	f	w	w
f	f	w	f	w	w

also: $\neg(A \wedge (\neg B)) \Leftrightarrow (A \Rightarrow B)$

Beispiel:

Z.z.: $\sqrt{2}$ ist keine rationale Zahl

also: $\forall q: (\underbrace{q \in \mathbb{Q}}_{A} \Rightarrow \underbrace{q^2 \neq 2}_{B})$

Beweis: Angenommen, es gibt $q \in \mathbb{Q}$ mit $q^2 = 2$.

Sei $q = \frac{a}{b}$ mit $a, b \in \mathbb{Z}$ (und $b \neq 0$)

mit: $\frac{a}{b}$ ist vollständig gekürzt, d.h. der größte gemeinsame Teiler (ggT) von a und b ist 1.

Wegen: $2 = q^2 = \frac{a^2}{b^2}$ ist $2b^2 = a^2$

$\Rightarrow$ a ist gerade, d.h. $a = 2 \cdot a_0$ mit $a_0 \in \mathbb{Z}$.

Einsetzen in $2b^2 = a^2$ liefert $2b^2 = 4a_0^2$, also $b^2 = 2a_0^2$

$\Rightarrow$ b und a sind gerade, d.h. 2 ist ein gemeinsamer Teiler von a und b $\lightning$ zur Voraussetzung

[im Widerspruch zur Vor.: a, b teilerfremd]

$\Rightarrow$ Also haben wir die Annahme widerlegt, und damit ist die Behauptung wahr.

(VI

3) Vollständige Induktion

Beweise eine Aussage der Form $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}: A(n)}$

Dazu:

i) <u>Induktionsanfang</u>: beweise $A(n)$ für $n = n_0$ IA

ii) <u>Induktionsschritt</u>: beweise $\underbrace{A(n)}_{\text{Ind.-Voraussetzung, Ind.-Annahme}} \Rightarrow A(n+1)$ IS

Wichtig:
- Unterschied "$A(n)$" und "$\forall n: A(n)$"
  (wenn man $A(n)$ beweisen wollte, wäre $A(n) \Rightarrow A(n+1)$ Zirkelbeweis)
- nur Induktionsschritt reicht <u>NICHT</u>!
  Extrembsp.: Beh: $n = n+1$

Beispiele:

a) arithmetische Summenformel

<u>IV</u>: $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

<u>IA</u>: $n=1$: $\frac{1(1+1)}{2} = \frac{2}{2} = 1$ ✓

<u>IS</u>: $n \to n+1$:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + (n+1)$$

$$\overset{IV}{=} \frac{n(n+1)}{2} + n+1$$

$$\cancel{= \frac{n(n+1)+2n+2}{2}}$$

$$= \frac{n^2+n}{2} + n+1$$

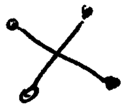
$$\cancel{= \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} + n+1}$$

$$= \frac{n^2+2n+n+2}{2}$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \quad ✓ \qquad \square$$

b) Eulerformel für Graphen

Def.: Ein Graph heißt planar, wenn eine Einbettung (in die Ebene) existiert, bei der sich keine Kanten kreuzen.



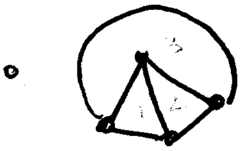
Eulerformel für Graphen

Sei G ein zusammenhängender planar eingebetteter Graph.

Dann gilt:

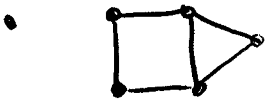
$$\underbrace{|V|}_{\#\text{Knoten}} - \underbrace{|E|}_{\#\text{Kanten}} + \underbrace{|F|}_{\#\text{Flächen}} = 2$$

Beispiele:



$|V| = 4$
$|E| = 6$
$|F| = 4$

$4 - 6 + 4 = 2$



$|V| = 5$
$|E| = 6$
$|F| = 3$

$5 - 6 + 3 = 2$

ABER: Beispiele sind KEIN Beweis!!

~~Beweis~~: Wir beweisen noch erweiterte Form:

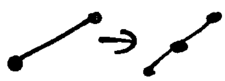
Sei G ein planar eingebetteter Graph.

Dann gilt: $|V| - |E| + |F| = \underbrace{|Z|}_{\#\text{Zshgs.komponenten}} + 1$

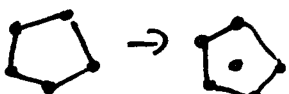
Beweis: durch Induktion über $|V|$ und $|E|$

IA: $G = (\emptyset, \emptyset)$ $|F| = 1$, $|Z| = |V| = |E| = 0$ ✓

IS: neuer Knoten

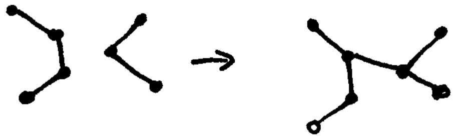
Fall 1: Knoten teilt Kante 

$\Rightarrow$ $|V|$ und $|E|$ erhöhen sich um 1 $\Rightarrow$ ausgeglichen

Fall 2: Knoten im Inneren einer Fläche: 

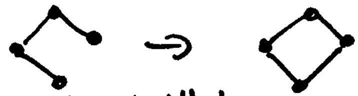
$\Rightarrow$ $|V|$ und $|Z|$ erhöhen sich um 1 $\rightarrow$ ausgeglichen neue Kante

Fall 1: Kante verbindet bisher disjunkte Teile des Graphen



$|E|$ erhöht sich um 1
$|Z|$ verringert sich um 1
} ausgeglichen

Fall 2: Kante verbindet Knoten derselben Zshgs.komp.e



$\Rightarrow$ eine Fläche wird geteilt!

$\Rightarrow$ $|E|$ u. $|F|$ erhöhen sich um 1 $\square$