AuD, Gü, 08.12. (Zusatzübung - Beweise)

Situation?

gegeben: Aussage A gilt

zu zeigen: Aussage B gilt

Wir wollen also B aus A folgern: $A \Rightarrow B$

* Möglichkeit 1: Direkter Beweis

Angenommen wir wissen für $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ A

Zu zeigen ist: $\sum_{i=1}^{n+1} i^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$ B

Wir wollen hier also die Gleichheit zeigen

↳ fangen wir doch mal mit linker Seite an und versuchen A, von dem wir wissen, dass es gilt, zu nutzen

$$\sum_{i=1}^{n+1} i^2 = \sum_{i=1}^{n} i^2 + (n+1)^2$$

$$\overset{A \text{ gilt}}{=} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1) + (n^2+2n+1)6}{6}$$

$$= \frac{(n^2+n)(2n+1) + 6n^2 + 12n + 6}{6} = \frac{2n^3 + 2n^2 + n^2 + n + 6n^2 + 12n + 6}{6}$$

$$= \frac{2n^3 + 9n^2 + 13n + 6}{6} = \frac{(2n+3)\cdot(n^2+3n+2)}{6}$$

$$= \frac{(2n+3)(n+1)(n+2)}{6}$$

□

„ausrechnen"

was hilft?

$(n+1)(n+2)(2n+3)$
$= (n^2+2n+n+2)(2n+3)$
$= (n^2+3n+2)(2n+3)$
$= 2n^3 + 6n^2 + 4n + 3n^2 + 9n + 6$
$= 2n^3 + 9n^2 + 13n + 6$

noch ein Beispiel 2 ohne Summen:

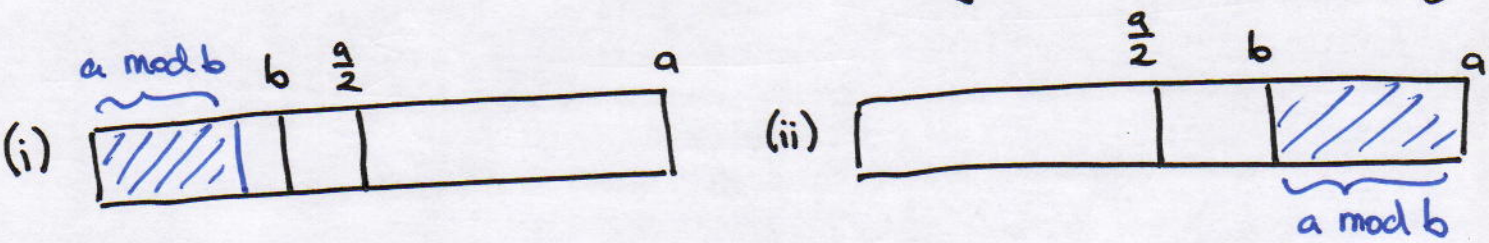
Zu zeigen: $\underbrace{a \geq b}_{A} \Rightarrow \underbrace{a \bmod b < \frac{a}{2}}_{B}$

Wir können also voraussetzen, dass b kleinergleich a ist

Zur Erinnerung: $a \bmod b = r \Leftrightarrow a = b \cdot n + r$

Beweis:

$a \geq b \Rightarrow$ zwei mögliche Fälle (i) $b \leq \frac{a}{2}$ (ii) $b > \frac{a}{2}$ → nennt man „Fallunterscheidung"



(i) wenn $b \leq \frac{a}{2} \Rightarrow a \bmod b < b \leq \frac{a}{2}$

↗ wieso? Rest kleiner als b, sonst hätte b ja noch mal „reingepasst"

(ii) wenn $b > \frac{a}{2} \Rightarrow a \bmod b = a - b < \frac{a}{2}$

↑ $a = n \cdot b + r = 1 \cdot b + r \Leftrightarrow r = a - b$

↑ $b > \frac{a}{2}$

□

Beispiel 3:

z.z.: Sei $\underbrace{\text{n eine ungerade natürliche Zahl}}_{A}$, dann ist auch $\underbrace{n^2 \text{ ungerade}}_{B}$

Beweis: $\underbrace{n \in \mathbb{N} \text{ ungerade}}_{A} \Rightarrow \exists\, k \in \mathbb{N}_0 : n = 2k+1$

$\Rightarrow n^2 = (2k+1)^2 = \underbrace{4k^2 + 4k}_{\text{gerade}} + 1$

$\Rightarrow \underbrace{n^2 \text{ ungerade}}_{B}.$

□

* Möglichkeit 2: Indirekter Beweis

Idee:

$\boxed{\text{Statt „}A \Rightarrow B\text{" zeigt man „}\neg(A \wedge (\neg B))\text{"}}$ (*)

Warum?

↳ war das mit den Wahrheitstafeln, was heißt das?

$\boxed{\text{Eine Aussage ist entweder wahr oder falsch – ein Drittes gibt es nicht!}}$

- $3^2 > 2^3$ $(9>8)$ ist eine wahre Aussage („richtig")
- 4 ist eine Primzahl ist eine falsche Aussage (gilt nicht)

Schreibweise:	lies	ist genau dann wahr, wenn
A	A	A wahr ist
$\neg A$	nicht A	A falsch ist
$A \wedge B$	A und B	A und B wahr sind
$A \vee B$	A oder B	A oder B wahr ist, oder beide
Implikation $A \Rightarrow B$	aus A folgt B	A falsch oder B wahr ist

↗ Ist die Voraussetzung falsch, ist jede Implikation (nicht das Ergebnis) richtig!

Wir hatten gesehen „$A \Rightarrow B$" und „$\neg(A \wedge (\neg B))$" haben die gleiche Wahrheitsbelegung, es ist also egal, was von beidem wir beweisen.

Wie zeigt man denn „$\neg(A \wedge (\neg B))$"?

↳ man widerlegt „$A \wedge (\neg B)$"

↳ das heißt ?:

Man nimmt an „$A \wedge (\neg B)$" gilt und führt das zum Widerspruch, zeigt also, dass:

- $\neg A$ gilt, oder
- B gilt, oder
- eine offensichtlich falsche Aussage gilt

Damit hat man gezeigt, dass „$A \wedge (\neg B)$" nicht gelten kann, also „$\neg(A \wedge (\neg B))$" bewiesen.

<u>Beispiel 4:</u>

$\underbrace{n^2 \text{ gerade}}_{A} \Rightarrow \underbrace{n \text{ gerade}}_{B}$ („Wenn für $n \in \mathbb{N}$ n^2 gerade ist, ist auch n gerade")

Wir nehmen an, dass $A \wedge (\neg B)$ gilt, d.h.

$\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$: n_0^2 gerade und n_0 ungerade ↯ Beispiel 3: wenn n_0 ungerade ist, ist auch n_0^2 ungerade

↳ Damit haben wir gezeigt, dass „A" und „$\neg B$" nicht beide gelten können,
also „$A \wedge (\neg B)$" widerlegt, und damit „$A \Rightarrow B$" gezeigt.

Beispiel 5:

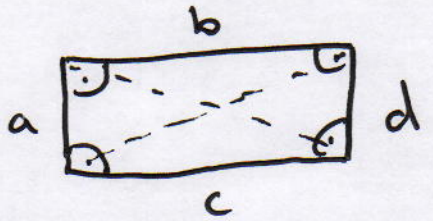
Zu zeigen: Ein Viereck mit verschieden langen Diagonalen (A) ist kein Rechteck (B).

Beweis: Wir nehmen wieder an, dass „$A \wedge (\neg B)$" gilt:

Es gibt ein Viereck mit verschieden langen Diagonalen, das ein Rechteck ist.

Wir bezeichnen die Diagonalen mit d_1, d_2. OBdA $d_1 < d_2$

Seien die 4 Seiten des Rechtecks a, b, c, d:



Dann gilt: $a = d$, $b = c$

$$a^2 + c^2 = b^2 + d^2 = d_1^2$$
$$a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = d_2^2$$

$$\Rightarrow d_1^2 = a^2 + c^2 \underset{b=c}{=} a^2 + b^2 = d_2^2 \Rightarrow d_1 = d_2 \quad ↯ \text{ zu } d_1 < d_2$$

Damit haben wir wieder „$A \wedge (\neg B)$" widerlegt. $\square$

Beim <u>Induktionsbeweis</u> will man zeigen, dass eine Aussage $A(n)$ für alle natürlichen Zahlen $n \geq n_0$ gilt.

Aussage hängt von n ab, es gibt also die Aussagen:
$A(1), A(2), A(3), \ldots$

Also, wir wollen beweisen:

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : A(n)}$$

oder auch ($n_0 = 1$):

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} : A(n)}$$

Wäre eine Lebensaufgabe tatsächlich

wahr ✓ $\boxed{A(1)}$, $A(2)$, $A(3)$, ... $A(4711)$, $A(1.000)$, ..., $A(1.000.000)$, ... usw.
zu zeigen

↳ sollten uns was anderes einfallen lassen!

1. Wir beweisen $\boxed{A(n_0)}$ — Induktionsanfang „Anker"
2. Wir zeigen $A(n) \Rightarrow A(n+1)$, also, dass wir aus $A(n)$ $A(n+1)$ folgern können — Induktionsschritt

Achtung:
- wir zeigen „$\forall n: A(n)$" <u>nicht</u> „$A(n)$"
- nur Induktionsschritt reicht nicht!!

Beispiel 6:

Zu zeigen: $\forall n \in \mathbb{N}: \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$ $A(n)$

Induktionsanfang: – wir wollen also $A(1)$ zeigen

$$\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{n}{n+1} \underset{n=1}{=} \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} \qquad \Rightarrow A(1) \text{ gilt}$$

Induktionsschritt:

Wir wollen „$A(n) \Rightarrow A(n+1)$" zeigen.
Wir können also annehmen, dass $A(n)$ wahr ist, die Aussage also für n gilt (die sog. Induktionsvoraussetzung) und wollen $A(n+1)$ folgern.

Induktionsvoraussetzung: $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$

Wir wollen was für $n+1$ zeigen, fangen wir mit linker Seite an, und hoffen „richtige" rechte Seite zu erhalten

dafür gilt die IV!!

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

$$\overset{IV}{=} \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{n+1}{n+2} = \frac{(n+1)}{(n+1)+1}$$

$\square$