2.7.: Sei G ein Graph mit n Knoten und m Kanten, dann gilt:

I

$$\sum_{i=1}^{n} \delta(v_i) = 2m \qquad \delta(v_i) = \deg(v_i)$$

Beweis per Induktion:

IA: $G = (\emptyset, \emptyset)$: $\sum_{i=1}^{n} \delta(v_i) = 0$

$2m = 0$ ✓

IV: $\sum_{i=1}^{n} \delta(v_i) = 2m$

Induktionsschritt:

$n \rightsquigarrow n+1$: splittet eine Kante $\rightsquigarrow m \to m+1$, Knoten hat 2 inzidente Kanten: $\delta(v_{n+1}) = 2$

$$\sum_{i=1}^{n+1} \delta(v_i) = \sum_{i=1}^{n} \delta(v_i) + \delta(v_{n+1})$$

$$\overset{IV}{=} 2m + \delta(v_{m+1}) = 2m+2 = 2(m+1)$$

$m \rightsquigarrow m+1$: neue Kante e_{m+1} ist adjazent zu 2 Knoten, seien dies v_i, v_j $(i,j \in \{1,\dots,n\})$ $\Rightarrow$ $\delta(v_i), \delta(v_j)$ erhöhen sich je um 1 $\Rightarrow$ $\sum \delta(v_i)$ um 2

$$2(m+1) = 2m+2$$

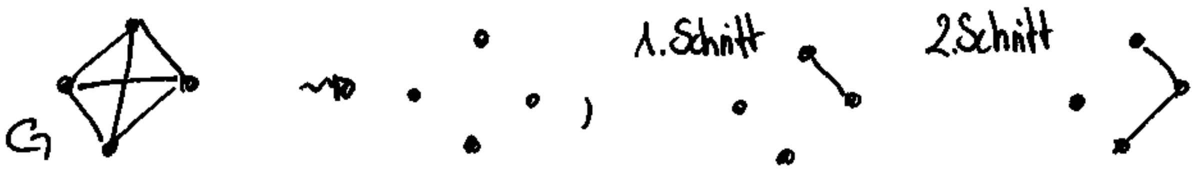
$$\overset{IV}{=} \underbrace{\underbrace{\sum_{i=1}^{n} \delta(v_i)}_{\text{Graph ohne } e_{m+1}} + 2}_{\text{neuer Graph}}$$

✓ □

oder:

Entferne alle Kanten aus G und füge diese dann nacheinander wieder hinzu, bis G entstanden ist.

Bsp.:



II

Wird eine Kante eingefügt, ändert sich der Grad von zwei Knoten um genau 1, d.h. die Summe ändert sich um 2.

Da die Summe $\sum_{i=1}^{n} \delta(v_i)$ für einen Graphen ohne Kanten Null ist und sich die Summe in jedem Schritt um 2 erhöht bleibt $\sum \delta(v_i)$ immer gerade, die Anzahl der Kanten erhöht sich in jedem Schritt um 1

↳ nach m Schritten $\sum_{i=1}^{n} \delta(v_i) = 2m$