**Satz 4.5** „Max-Flow min-Cut"

Der Wert eines maximalen Flusses entspricht dem eines minimalen Schnittes.

# Verbindung Tableau & Geometrie

$$(P)\begin{cases}\max & c^T x\\ \text{st} & Ax \leq b\\ & x \geq 0\end{cases}\qquad (D)\begin{cases}\min & u^T b\\ \text{st} & u^T A \geq c^T\\ & u \geq 0\end{cases}$$

$\downarrow$ im Tableau

$$\begin{cases}\max & \binom{c}{0}^T x\\ \text{st} & (A\ I)x = b\\ & x \geq 0\end{cases}$$

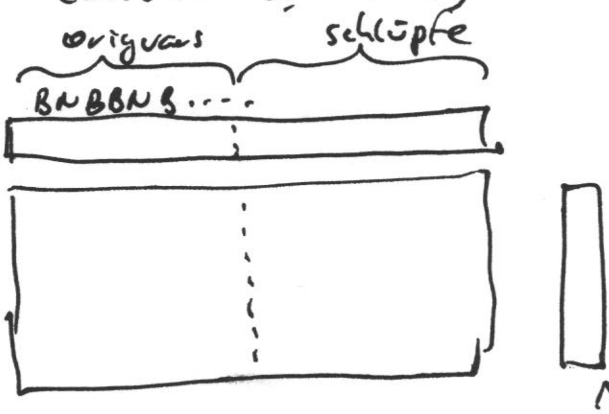
$x_1, \dots, x_n$ = Originalvars

$x_{n+1}, \dots, x_{n+m}$ = Schlüpfe

$$\Big\downarrow\ \begin{aligned} z &:= \binom{c}{0}\\ D &:= (A\ I)\end{aligned}$$

$$\begin{cases}\max & z^T x\\ \text{st} & D^T x = b\\ & x \geq 0\end{cases}$$

Tableau (nicht sortiert!) für Basis $B$, NB. $N$




$\bar{b} = D_B^{-1} b$

Erinnerung: Duale Lösung $u^T = z_B^T D_B^{-1}$

Oberste Tableau-Zeile (red. Kosten)

Eintrag $i$:

$\boxed{1.\ i \in \{1, \dots, n\}}$ ($x_i$ Orig. Var.)

- $i \in B$: • $x_i$ kann positiv werden.
  Für kompl. Schlupf müsste also $(u^T A)_i = (c_i)$
  Sichergestellt, da $u^T = z_B^T D_B^{-1}$
  $\Rightarrow (u^T A)_i = (u^T D)_i = u^T D_{\cdot i} = z_B^T D_B^{-1} D_{\cdot i} = c_i$
  • Eintrag ist $0 = c_i - (u^T A)_i$

- $i \in N$: • $x_i = 0$
  • red. Kosten $\bar{z} = \underset{\uparrow\, c_i}{z_N} - z_B^T \underbrace{D_B^{-1}}_{u} D_N$ an stelle $i$:

  $\bar{z}_i = c_i - u^T D_{\cdot i} = c_i - u^T A_{\cdot i}$

!

$\boxed{2.\ n+i \in \{n+1, \dots, n+m\}}$ ($x_{n+i}$ Schlupf)

- $n+i \in B$: • $x_{n+i}$ kann positiv
  $\Rightarrow b_i - A_{i\cdot} x$ kann positiv
  Für kompl. Schlupf müsste also $u_i = 0$

  • oben steht $0 = -u_i$

• $u^T = z_B^T D_B^{-1}$. Ang. $n+i$ ist $j$-te Basisv. $D_B = \begin{array}{c} \scriptstyle j \\ \left(\boxed{*}\ 1\ \boxed{*}\right) \end{array} \leftarrow i \Rightarrow D_B^{-1} = \begin{array}{c} \scriptstyle i \\ \left(\boxed{*}\ 1\ \boxed{*}\right) \end{array} \leftarrow j$

$\Rightarrow u_i = (z_B^T D_B^{-1})_i = (z_B)_j = z_{n+i} = 0$.

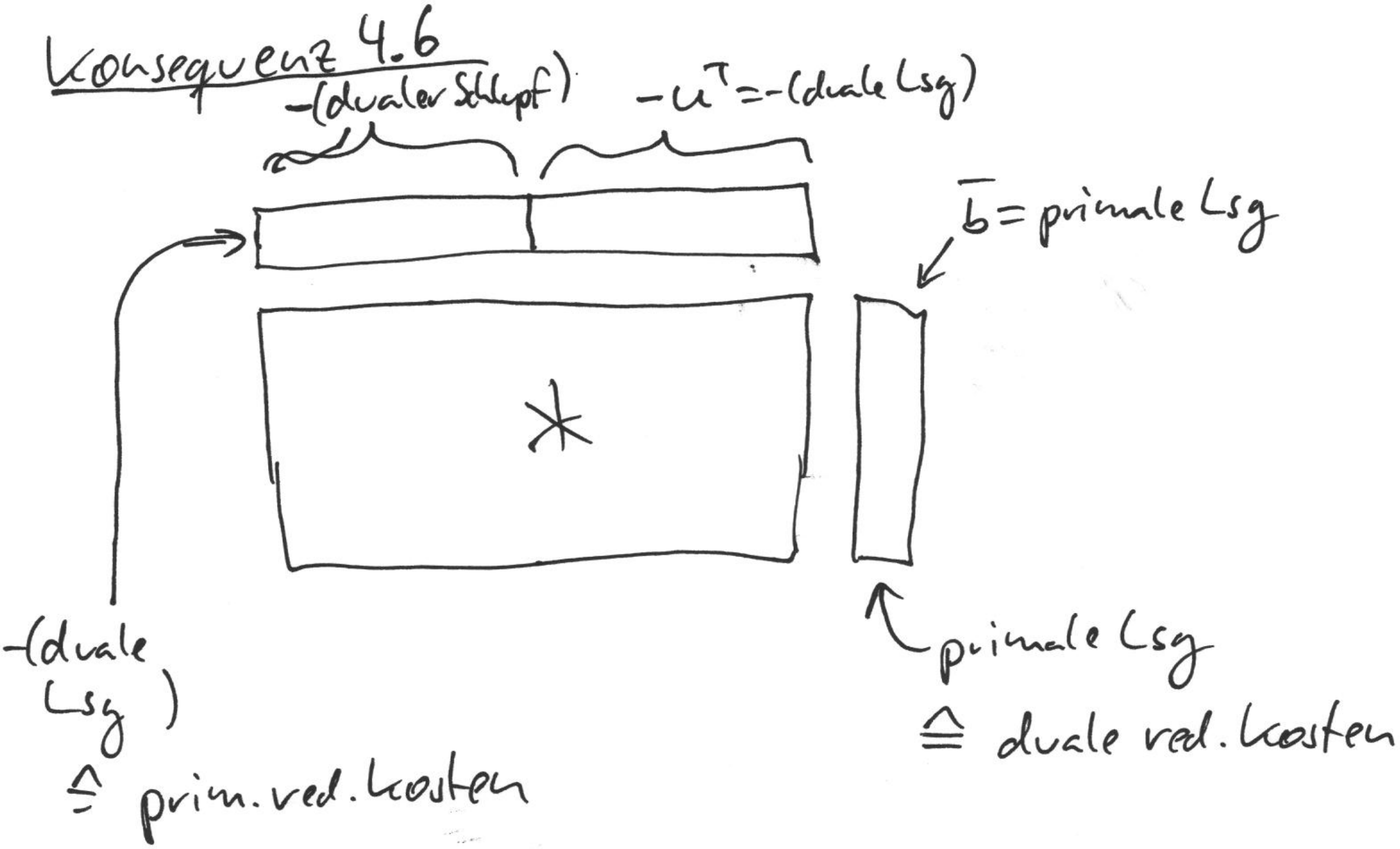
$-n+i \in N$:

- $\bar{z}$ an pos $n+i$:

$$\cancel{z_{n+i}} \; z_N - z_B^T D_B^{-1} D_N$$

$$\rightarrow \underbrace{z_{n+i}}_{0} - u^T \underbrace{D_{\cdot n+i}}_{\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix} \leftarrow i} = -u_i$$

**Konsequenz 4.6**




**Konsequenz 4.7**

$\bar{c} \le 0 \iff u$ zulässig

$\bar{b} \ge 0 \iff x$ zulässig

zusm $\Longrightarrow$ $\bar{c} \le 0, \bar{b} \ge 0 \iff$ optimal.

Also: $\bar{c}_i > 0 \Rightarrow u$ unzulässig

$\Rightarrow$ primaler Schritt verbessert prim Lsg, und macht duale „zulässiger"

$\bar{b}_i < 0 \Rightarrow x$ unzulässig

$\Rightarrow$ dualer Schritt verbessert duale Lsg, macht prim. Lsg „zulässiger"

$\rightsquigarrow$ primal-dualer Simplex