Nachtrag zu Kapitel 3 – reduzierte Kosten.

$$\begin{array}{ll} \max & c^T x \\ \text{s.t.} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array} \quad , \quad B, N \text{ gegeben}$$

$\Rightarrow$ jedes zulässige x erfüllt $I x_B + \underbrace{A_B^{-1} A_N}_{\bar{A}} x_N = \underbrace{A_B^{-1} b}_{\bar{b}}$

also $x_B = \bar{b} - \bar{A} x_N$.

Die Kosten sind dann

$$c^T x = c_B^T x_B + c_N^T x_N = c_B^T(\bar{b} - \bar{A} x_N) + c_N^T x_N$$

$$= \underbrace{c_B^T \bar{b}}_{=: z} + (c_N^T - c_B^T \bar{A}) x_N$$

~~Also gilt~~

Im Tableau:

$\swarrow$ Hier 0 erzeugen

$$-(c_B)_i \cdot \text{Spalte}_i \quad \begin{array}{cc|c} c_B^T & c_N^T & 0 \\ \hline I & \bar{A} & \bar{b} \end{array}$$

Neue Zeile $(c_B^T \; c_N^T \; 0) - \sum_{i=1}^{m} (c_B)_i \left[(I \; \bar{A} \; \bar{b})_{i\cdot} \right]$

$$= \left(c_B^T - c_B^T \quad c_N^T - c_B^T \bar{A} \quad 0 - c_B^T \bar{b} \right)$$

Also $\begin{array}{cc|c} 0 & \bar{c} & -z \\ \hline I & \bar{A} & \bar{b} \end{array}$

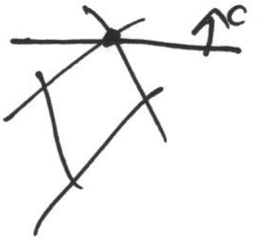
Entspricht der Gleichung

$$0 x_B + \bar{c} x_N - c^T x = -z$$

Für $x_B = \bar{b}$, $x_N = 0$ ist also $c^T x = z$.

Ende Nachtrag

Betrachte (P) $\begin{cases} \max\ c^T x \\ \text{s.t.}\ \ Ax \leq b \end{cases}$ (D) $\begin{cases} \min\ u^T b \\ \text{s.t.}\ \ u^T A = c^T \\ \qquad u \geq 0 \end{cases}$

((Erinnerung ))

Ang., x, u sind zulässig. Dann gilt

$$\underbrace{c^T x}_{= u^T A x} = u^T b$$

$$\Leftrightarrow \quad u^T A x = u^T b$$

$$\Leftrightarrow \quad \underbrace{u^T (Ax - b)}_{\sum_{i=1}^{m} \underbrace{u_i}_{\geq 0} \underbrace{(Ax-b)_i}_{\leq 0}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \forall i = 1..m: \ u_i = 0 \ \vee \ A_{i\cdot} x = b_i$$

<u>Satz 4.2</u> („komplementärer Schlupf")

Seien x, u zul. für (P), (D). Dann gilt:

$$c^T x = u^T b \iff \begin{cases} (1)\ \forall i=1,\dots,m: & u_i > 0 \Rightarrow A_{i\cdot} x = b_i \\ (2)\ \forall i=1,\dots,m: & A_{i\cdot} x < b_i \Rightarrow u_i = 0 \end{cases}.$$

(vgl. 1. VL !)

<u>Satz 4.3</u> („starke Dualität"). Wenn (P) optLsg hat, so auch (D), und die Zielfkt. ist gleich. (und umgekehrt)

<u>Beweis</u> für (P) $\begin{cases} \max & c^T x \\ \text{s.t.} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{cases}$ (D) $\begin{cases} \min & u^T b \\ \text{s.t.} & u^T A \geq c^T \end{cases}$

Sei x^* opt für (P), mit Basis B, Nichtbasis N.

Setze $u^* := c_B^T A_B^{-1}$. Setze $x = (x_B\ x_N)$, $x_B = A_B^{-1} b$, $x_N = 0$

- $c^T x^* = c^T x = c_B^T A_B^{-1} b = u^T b$

-

- $$u^T A = u^T (A_B \; A_N)$$
$$= (u^T A_B \quad u^T A_N)$$
$$= (\underbrace{c_B^T A_B^{-1} A_B}_{c_B^T} \quad \underbrace{c_B^T A_B^{-1} A_N}_{\text{opt} \Rightarrow c_N^T - c_B^T A_B^{-1} A_N \leq 0 \; \Rightarrow c_N^T \leq c_B^T A_B^{-1} A_N})$$
$$\geq c^T$$

\#

Korollar 4.4

x, u sind opt für (P), (D)

$\Longleftrightarrow$ Erfüllen Komp.-Schlupf-Bed. 4.2(1) & 4.2(2).

Beispiel: Flows

$G=(V,A)$ gegeben, $s,t\in V$. G Digraph.

Vereinfachung $st\notin A$.

Kapazitäten k_a, $a\in A$

$$(P)\begin{cases} \max \sum_{a\in\delta^+(s)} f_a - \sum_{a\in\delta^-(s)} f_a & \\ \text{s.t.} \quad -\sum_{a\in\delta^+(v)} f_a + \sum_{a\in\delta^-(v)} f_a = 0 & \forall v\neq s,t \quad [\to y_v] \\ \quad f_a \le \cancel{k}_a & \forall a\in A \quad [\to z_a \ge 0] \\ \quad f\ge 0 & \end{cases}$$

$$(D)\begin{cases} \min \sum_{a\in A} \cancel{k}_a z_a & \\ \text{s.t.} \quad -y_u + y_v + z_{a} \ge 0 & \forall uv\in A \\ \quad z\ge 0,\ y_s=1,\ y_t=0 & \end{cases}$$

(Mit Transformation für y_s, y_t)

Setze $W:=\{v\in V \mid y_v \ge 1\}$. Dann gilt:

$a\in\delta^+(W) \Rightarrow y_u > y_v \Rightarrow z_a > 0 \underset{\text{cslack}}{\Rightarrow} f_a = c_a$, Kante saturiert

$a\in\delta^-(W) \Rightarrow y_u < y_v \le y_v + z_a \Rightarrow -y_u+y_v+z_a > 0 \underset{\text{cslack}}{\Rightarrow} f_a = 0$

Also $\delta(W)$ saturierter Schnitt $\Rightarrow$ Max-Flow-Min-Cut