Zur Erinnerung

max $c^T x$

s.t. $Ax \le b \qquad x \ge 0$

Tableaudarstellung von LPs

Basis B

Nichtbasis N

0	$\bar{c}^T$	$-ZFW$
$A_B^{-1} A_B = I$	$A_B^{-1} A_N =: \bar{A}$	$A_B^{-1} b =: \bar{b}$

$x_B = \bar{b}$

$x_N = 0$

~~Bsp. $x_1 \; x_2 \; x_3 \; x_4 \; x_5 \; x_6$~~

4.3.1 Zulässigkeit beim Basiswechsel

x_q soll neue Basisvar. sein, gegen welches x_p darf man tauschen?

aus letzter Vorlesung bekannt: $\varepsilon := \min_i \left\{ \frac{x_i}{y_{iq}} \;\middle|\; y_{iq} > 0 \right\}$

mit $y = A_B^{-1} A_{\cdot q}$

Bsp.:

0	0	0	-2	-8	-3	0
1	0	0	2	4	6	4
0	1	0	1	2	3	3
0	0	1	-1	2	1	1

$\underbrace{}_{y_i}$

$B = \{1, 2, 3\}$

$N = \{4, 5, 6\}$

x_4 soll Basis-Var. werden

Suche $\min_{1 \le i \le m} \left\{ \frac{x_i}{y_i} \;\middle|\; y_i > 0 \right\}$

sichert das $\bar{b} \ge 0$

$\frac{Y_1}{X_1} = \frac{4}{2} = 2$ Min. $\Rightarrow$ Pivotelement

$\frac{Y_2}{X_2} = \frac{3}{1} = 3$

$Y_3 = -1 < 0$

$-\frac{1}{2}$	0	0	0	-10	-6	-2
$\frac{1}{4}$	0	0	1	1	$\frac{3}{2}$	1
$-\frac{1}{4}$	1	0	0	1	$\frac{3}{2}$	2
$+\frac{1}{4}$	0	1	0	3	$\frac{5}{2}$	2

$B = \{2, 3, 4\}$ $N = \{1, 5, 6\}$

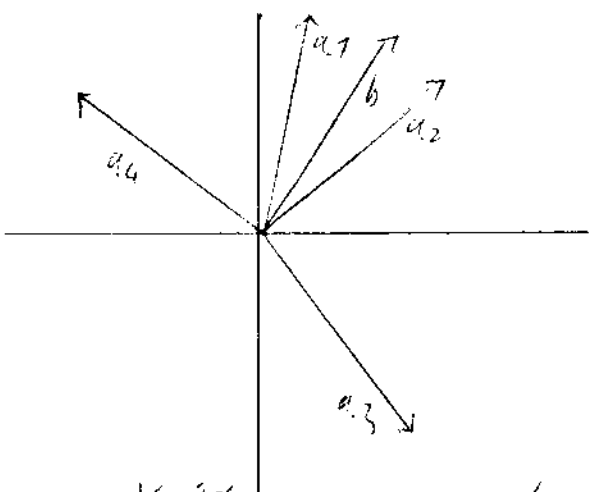
Geometrische Interpretation

1. Die zulässige Menge ist eine konvexe Menge eingebettet im $\mathbb{R}^n$. Basislösungen sind Extrempunkte.
   Basiswechsel: Laufen von einem Extrempunkt zum nächsten entlang einer Kante.

2. Darstellung im Raum der Spalten von A und b
   Bsp. für $n = 4$, $m = 2$

$$A = \begin{array}{cccc} \multicolumn{4}{c}{\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}} \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{array}$$

also $(a_1, a_2, a_3, a_4)\, x = b$
$x \geq 0$



b wird als nicht-negative LK von Vektoren $a_1 - a_4$ dargestellt ($x \geq 0$). Mögliche Basis a_1, a_2. Soll a_3 in die Basis aufgenommen werden, so muß gegen a_2 getauscht werden entsprechend $a_1 \leftrightarrow a_4$.

3.2 Bestimmung eine minimalen zulässigen Lösung

$$\max \quad z = c_1 x_1 + \dots + c_n x_n$$
$$Ax = b$$
$$x \geq 0$$

$(x_B, 0) \in \mathbb{R}^n$ sei Basislösung $\qquad Y = A_B^{-1} A_N$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & y_{1,m+1} & \cdots & y_{1,n} \\ 0 & 1 & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & & & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & y_{m,m+1} & \cdots & y_{m,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar b_1 \\ \vdots \\ \bar b_n \end{pmatrix}$$

$$Z_0 = c_B^T x_B \;, \quad c_B = (c_1, \dots, c_m)$$

$$= c^T x = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

$$= \sum_{i=1}^{m} c_i x_i + \sum_{i=m+1}^{n} c_i x_i = \sum_{i=1}^{m} c_i \Big(\bar b_{i0} - \sum_{j=m+1}^{n} y_{ij} x_j \Big) + \sum_{i=m+1}^{n} c_i x_i$$

$$= \sum_{i=1}^{m} c_i \bar b_{i0} - \underbrace{\sum_{i=1}^{m} c_i \sum_{j=m+1}^{n} y_{ij} x_j} + \sum_{i=m+1}^{n} x_i c_i$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=m+1}^{n} c_i y_{ij} x_j$$

$$= \sum_{j=m+1}^{n} \underbrace{\sum_{i=1}^{m} c_i y_{ij}}_{z_j} x_j$$

$$= \sum_{i=1}^{m} c_i \bar b_{i0} - \sum_{j=m+1}^{n} x_j z_j + \sum_{i=m+1}^{n} x_i c_i$$

$$= Z_0 + \sum_{j=m+1}^{n} (c_j - z_j) \cdot x_j$$

Folgerung:

Ist $(c_j - z_j)$ positiv für ein j, so wird die Zielfunktion größer, wenn man x_j in die Basis aufnimmt

Satz 3.3 (Verbesserung der zul. Basislösung)

Gegeben sei eine nicht degenerierte zul. Basislsg. mit zug. Zielfunktionswert z_0 und für ein j sei $c_j - z_j > 0$. Dann gibt es eine zul. Bassislösung mit Zielfunktionswert $z > z_0$. Diese erhält man durch Hinzunahme von a_j in die Basis, falls möglich ($\min\left\{\frac{x_i}{y_{iq}} : y_{iq} > 0\right\}$ existiert).

Ist dieser Austausch nicht möglich, ist das Problem unbeschränkt, d.h. z kann beliebig groß werden ($\to \infty$)

Satz 3.4 (Optimalitätsbedingungen)

Falls für eine zul. BL $c_j - z_j \leq 0$ für alle j gilt, so ist die BL optimal!

Satz 3.5 (Endlichkeit des Simplexverfahrens für nichtdegenerierte Basen)

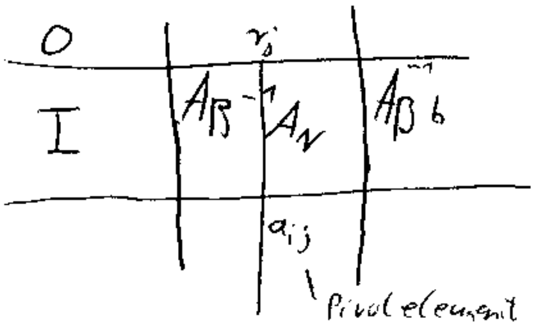
Wenn es keine degenerierten Basen gibt und man mit einer zulässigen Basislösung startet, dann findet das Simplexverfahren in endlicher Zeit eine Optimalität, falls es eine gibt.

Beweis:

Aus Satz 2.4 (Fundamentalsatz) folgt:
Es gibt eine optimale Basislösung
In jedem Simplexschritt verbessert sich der Zielfunktionswert, also kann sich keine Basis wiederholen (Satz 3.3)
Nach Satz 3.5 endet das Verfahren also nur im Optimum

$\blacksquare$

Aber was passiert bei degenerierten Basislösungen?



Eliminierungsschritt ergibt rechts $\frac{(A_B^{-1} b)_i}{a_{ij}}$:= Wert der neuen Basisvariablen

Zielfunktion ändert sich um $r_j \frac{(A_B^{-1} b)_i}{a_{ij}}$

Allerdings ist $\frac{(A_B^{-1} b)_i}{a_{ij}} = 0$ erlaubt! In diesem Fall ändert sich die Zielfunktion nicht. D.h. es gibt mehr als eine Möglichkeit, b darzustellen. Wir haben also eine degenerierte (oder auch „entartete") Basislösung ~~gdw~~. D.h.

1. Null rechts im Tableau
2. Basisvariable ist Null, d.h. Spalte wird nicht benötigt für Linearkombination.
3. Im worst case können degenerierte Basislösungen dazu führen, dass der Simplex Algorithmus „kreiselt", also nicht terminiert

3.6. Finden einer zulässigen Lösung (2-Phasen-Simplex)

Bisher haben wir immer angenommen, dass wir mit einer zulässigen Lösung starten. Aber:

- Wie findet man so eine?
- Gibt es überhaupt eine zulässige Lösung?

Satz 3.7

Das Problem

$$\text{I} \quad Ax = b, \quad x \geq 0$$

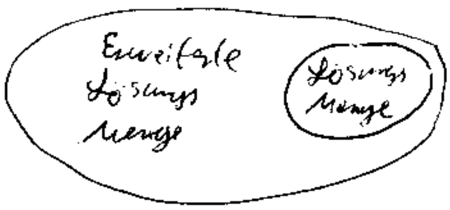
hat genau dann eine zulässige Lösung, wenn das Problem

$$\text{II} \quad \min \mathbb{1} y, \quad Ax + e^T y = b, \quad x, y \geq 0$$

Mit $e_i = 1$ für $b_i > 0$, $e_i = -1$ für $b_i < 0$, $e_i = 0$ für $b_i = 0$

den Optimalwert 0 hat

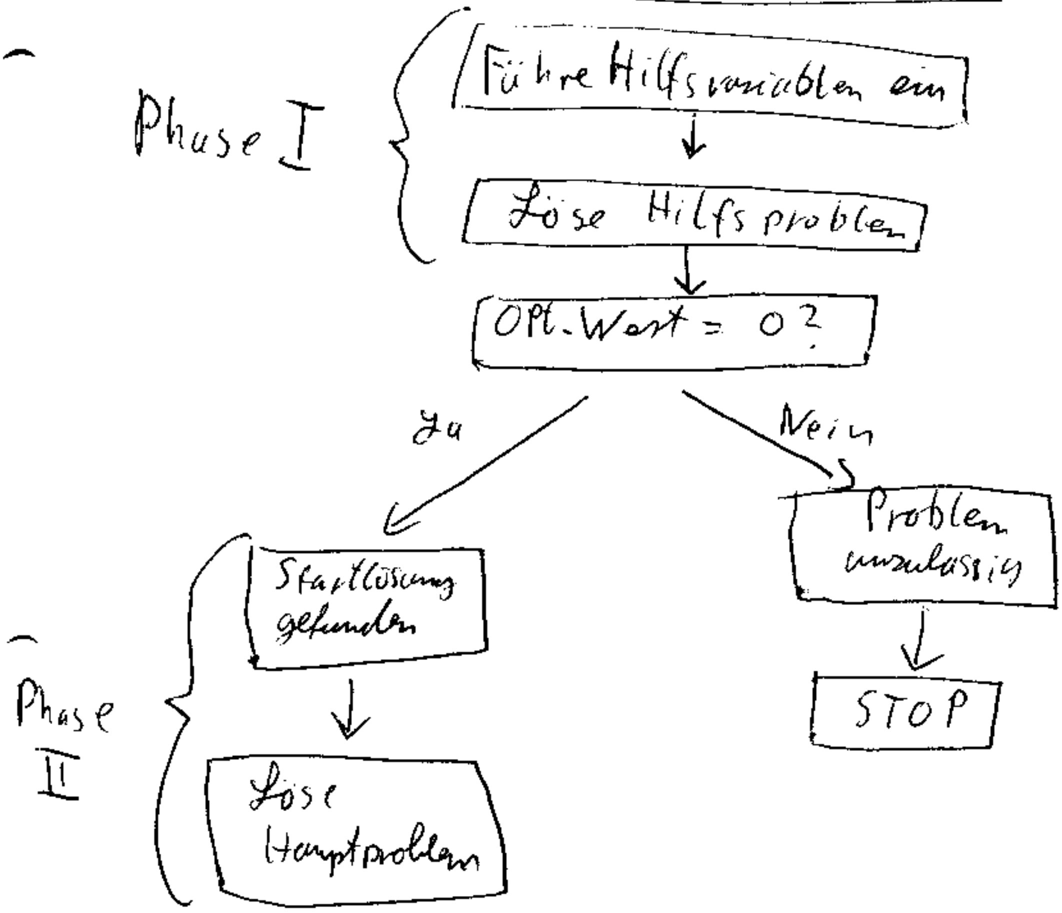
Die Idee von Satz 3.7 ist, den Lösungsraum so zu erweitern, dass es auf jeden Fall Lösungen gibt.



Maximum auf e.L. ≥ Maximum auf L.

Insbesondere ist $x = 0$ Lösung

Vorgehen nach der „2-Phasen-Methode"



Beispiel: $\max\ 2x_1 + x_2 + 4x_3$

s.t.

$$2x_1 + x_2 + 2x_3 = 4$$
$$3x_1 + 3x_2 + x_3 = 3$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Führe Hilfsvariablen ein:

$\min\ y_1 + y_2$

$$2x_1 + x_2 + 2x_3 + y_1 = 4$$
$$3x_1 + 3x_2 + x_3 + y_2 = 3$$

Löse Hilfsproblem:

Tableau $\qquad B = (y_1, y_2)$

	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	
y_1	2	1	2	1	0	4
y_2	3	3	1	0	1	3
	0	0	0	1	1	

Bringe Tableau in richtige Form für $B = (y_1, y_2)$: Ziehe beide Zeilen von der Zielfunktion ab:

x_1	x_2	x_3	y_1	y_2		
2	1	2	1	0	4	$2 = \frac{4}{2}$
3	3	1	0	1	3	$1 = \frac{3}{3}$
-5	-4	-3	0	0	-7	

Pivotisiere:

	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2		
y_1	0	-1	$4/3$	1	$-2/3$	2	$\frac{2}{4/3} = \frac{3}{2}$
x_1	1	1	$1/3$	0	$1/3$	1	$\frac{1}{1/3} = 3$
	0	1	$-\frac{4}{3}$	0	$\frac{5}{3}$	-2	
x_1	0	$-3/4$	1	$3/4$	$-1/2$	$3/2$	
x_2	1	$5/4$	0	$-1/4$	$1/2$	$1/2$	
	0	0	0	1	1	$\underline{\underline{0}}$	

$\Rightarrow$ Startlösung für das ursprüngliche Problem

Basis: $x_1 = 1/2$

$x_2 = 0$

$x_3 = 3/2$

Tableau für Hauptproblem:

Anpassen für Basis $B = (x_1, x_2)$

	x_1	x_2	x_3		
x_3	0	$-\frac{3}{4}$	1	$\frac{7}{2}$	
x_1	1	$\frac{5}{4}$	0	$\frac{1}{2}$	
	2	1	4		$-2\,\mathrm{II} - 4\,\mathrm{I}$

$+\frac{12}{20}\,\mathrm{II}$	x_3	0	$-\frac{3}{4}$	1	$\frac{3}{2}$	$-$
$\cdot \frac{4}{5}$	x_1	1	$\frac{5}{4}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1/2}{5/4} = \frac{2}{5}$
$-\frac{4}{10}\,\mathrm{II}$		0	$\frac{1}{2}$	0	-7	

x_3	$\frac{3}{5}$	0	1	$\frac{9}{5}$
x_2	$\frac{4}{5}$	1	0	$\frac{2}{5}$
	$-\frac{2}{5}$	0	0	$-\frac{34}{5}$

Optimales Tableau!

Lösung
$x_1 = 0$
$x_2 = \frac{2}{5}$
$x_3 = \frac{9}{5}$

Zielfunktionswert: $\frac{34}{5}$

Beweis Satz 3.7

„$\Rightarrow$" Angenommen (I) hat zulässige Lsg x^*. Dies kann man mit $y^* = 0$ zu einer zulässigen Lösung von II erweitern. Der Zielfunktionswert ist 0. Da die Zielfunktion auf jeden Fall mindestens 0 ist, ist das optimal

„$\Leftarrow$" Angenommen, wir haben einen Optimalwert von 0 für II
Dieser wird für den Vektor (x^*, y^*) angenommen.
Dann muß für alle i gelten: $y_i^* = 0$ (wegen Zielfunktion)
Damit gilt $Ax^* + e^T y^* = b$, $x^*, y^* \geq 0$
$= Ax^* = b$, $x^* \geq 0$
Also ist x^* zulässig für I