$(\leq) \to (=)$ Durch Einführen von „Schlupfvariablen" s:

$$Ax \leq b \iff \begin{cases} Ax + Is = b \\ s \geq 0 \end{cases}$$

Variablen

$$\begin{tikzcd} & x \leq 0 \arrow[dl, leftrightarrow] \arrow[dr, leftrightarrow] & \\ x \geq 0 \arrow[rr, leftrightarrow] & & x \text{ frei} \end{tikzcd}$$

$(\geq 0) \to (\text{frei})$: Deklariere $x \geq 0$ als Restriktion $Ix \geq 0$

$(\geq 0) \leftarrow (\text{frei})$: Splitte jedes x_i in einen "positiv"- und einen "negativ"-Anteil x_i^+, x_i^-.
Setze $x_i := x_i^+ - x_i^-$ mit $x_i^+, x_i^- \geq 0$

Bsp: $\underset{x \text{ frei}}{Ax \leq b} \rightsquigarrow \begin{array}{c} A(x^+ - x^-) \leq b \\ x^+, x^- \geq 0 \end{array}$

$$\downarrow$$

$$Ax^+ + (-A)x^- \leq b$$
$$x^+ \geq 0 \quad x^- \geq 0$$

$(\geq 0) \leftrightarrow (\leq 0)$ trivial

Dadurch lässt sich jedes LP in jeder der drei „Standardformen" ausdrücken:

$$\begin{cases} \max\ c^T x \\ \quad Ax \leq b \end{cases}$$ (gut für Geometriebetrachtungen)

$$\begin{cases} \max\ c^T x \\ \quad Ax \leq b \\ \quad x \geq 0 \end{cases}$$ (praktisch relevant)

$$\begin{cases} \max\ c^T x \\ \quad Ax = b \\ \quad x \geq 0 \end{cases}$$ (gut für Simplex-Algorithmus)

(Achtung: Im „Skript" sind die Standardformen z.T. mit $\min c^T x$!)

Für einen Algorithmus zum Lösen von LP's ist es sinnvoll, Lösungen (und Opt. Lsg.) besser charakterisieren zu können.

Dazu untersuchen wir

$$\begin{cases} \max & c^T x \\ \text{s.t.} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{cases}$$

<u>Annahme:</u> $\operatorname{rang}(A) = m$ (m = Zeilenzahl von A, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$)

Dann gibt es m linear unabhängige Spalten in A. Die Indizes dieser Spalten bezeichnen wir mit B, die übrigen Indizes mit N.
(Also $B \dot\cup N = \{1, \dots, n\}$)

Die Gleichung $Ax = b$ könnten wir jetzt so lösen:

- $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Teilvektor}}}{x_B}$ löst $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Teilmatrix}}}{A_B} x_B = b$, also $x_B = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{existiert,} \\ \text{da lin. unabh.}}}{A_B^{-1}} b$ (eindeutig)

- $x_N = 0$.

(Denn dann ist $Ax = \cancel{A}(A_B \, A_N)\begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} =$
$A_B x_B + A_N x_N = A_B A_B^{-1} b + A_N \cdot 0 = b$)

Das erfüllt aber nicht notwendigerweise $x \geq 0$! Und was ist mit verschiedenen Möglichkeiten, B zu wählen?

<u>Def. 2.1:</u> Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\operatorname{rang}(A) = m$.
Sei $B \subseteq \{1, \dots, n\}$ mit $|B| = m$
Sei $N := \{1, \dots, n\} \setminus B$.

(1) Wenn A_B regulär ist (d.h. invertierbar, d.h. alle Spalten lin. unabh.),

dann heisst

- B „BASIS" (zugehörige Variablen: „BASISVARIABLEN")
- N „NICHTBASIS" (–"– „NICHTBASISVARIABLEN")
- $x = (x_B \; x_N)^T$ mit $x_B = A_B^{-1} b$ und $x_N = 0$ „BASISLÖSUNG".

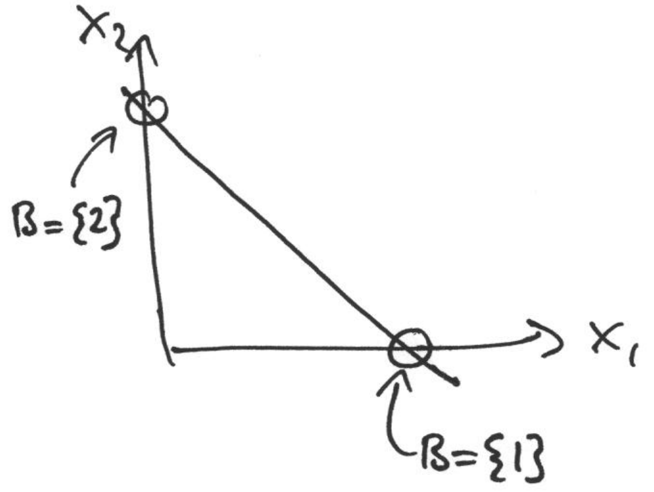
(2) Die Basislösung heisst ZULÄSSIG, wenn $x \geq 0$ (also $x_B \geq 0$)

(3) Die Basislösung heisst DEGENERIERT, wenn ~~m~~ eine Basisvariable 0 ist.

Wie sehen Basislösungen aus?

Einfachster Fall:

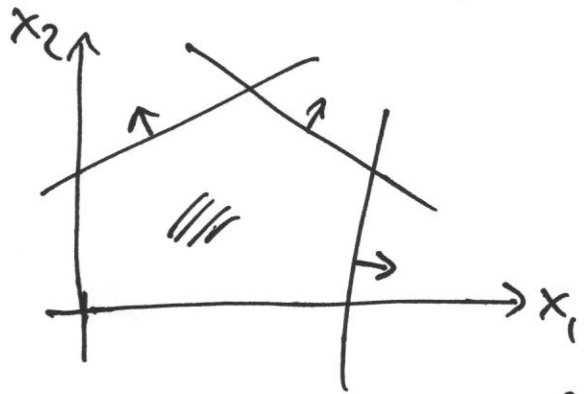
Bsp 2.2



$$x_1 + x_2 = 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1 \quad 1)x = 1 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Bsp 2.3 Betrachte $\begin{cases} Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{cases}$



Einführen von Schlupf $\rightsquigarrow$ $\begin{cases} Ax + Is = b \\ x, s \geq 0 \end{cases}$

Interpretation von B, N:

x_i in der Basis $\hat{=}$ x kann die Achse verlassen

x_i —"— N $\hat{=}$ x sitzt exakt auf der Achse

s_i —"— B $\hat{=}$ x kann Ugl. i verlassen

s_i —"— N $\hat{=}$ x sitzt auf Ugl. i

(Man kann also x_i als Schlupf der Ungleichung $x_i \geq 0$ interpretieren)

Zusammen: Mit N wähle ich Ungleichungen/Achsen, auf deren Schnittpunkt x sitzt. „A_B regulär" bedeutet, dass x eindeutig ist. „B zulässig" unterscheidet zulässige Lösungen von Schnittpunkten „ausserhalb" Die Basislösungen sitzen also „auf den Ecken" der Lösungsmenge!

<u>Satz 2.4</u> („Fundamentalsatz der Linearen Optimierung")

Gegeben
$$(P)\begin{cases} \max & c^T x \\ \text{s.t.} & Ax=b \\ & x \geq 0 \end{cases}$$

Dann gilt

(i) (P) hat zul. Lsg. $\Longleftrightarrow$ P hat zul. Basislsg

(ii) (P) hat optimale Lsg $\Longleftrightarrow$ P hat opt. Basislsg.

Beweis (i) „$\Leftarrow$": trivial

„$\Rightarrow$": Sei x zulässig.

Sei $D := \{i \mid x_i > 0\}$

Also gilt $A_D x_D = b$ (da alle anderen $x_i = 0$)

Unterscheide drei Fälle:

(a) $\operatorname{rang}(A_D) = |D|$, $|D| = m$

Dann ist D ~~Basis~~ zulässige ~~Ba~~ Basis.

(b) $\operatorname{rang}(A_D) = |D|$, $|D| < m$

Da $\operatorname{rang}(A) = m$, können wir $m - |D|$ zusätzliche Spalten finden, ~~sodass~~ die zusammen mit D linear unabhängig sind

$\leadsto$ Das ist eine (degenerierte) Basis

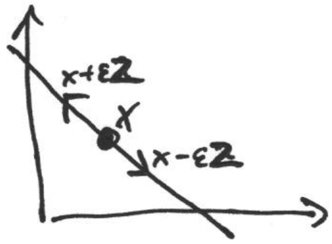
(c) $\operatorname{rang}(A_D) < |D|$ (also A_D lin. abhängig)

$\Rightarrow$ Es gibt Linearkoeffizienten z_i, so das $\sum_{i \in D} z_i A_{\bullet i} = 0$ und nicht alle z_i sind 0. Ergänze ~~zu M~~ mit Nullen zu Vektor $z \in \mathbb{R}^n$, also $\underbrace{\sum_{i=1}^{n} z_i A_{\bullet i}}_{= Az} = 0$

Wähle nun ein $j \in D$ mit $z_j > 0$ (falls es das nicht gibt: Statt z einfach $-z$ verwenden)

Betrachte nun Punkte $x - \varepsilon z$

(Die erfüllen $A(x-\varepsilon z) = Ax - \underbrace{\varepsilon \cdot (Az)}_{0} = Ax = b$)



Wenn wir nun ε von 0 aus ($x - 0z = x$!) wachsen lassen, wird $(x-\varepsilon z)_j$ immer kleiner. Also wird irgendwann irgendein $k \in D$ als erstes $(x-\varepsilon z)_k = 0$ erreichen (kann $k=j$, muss aber nicht)

Für dieses ε gilt:

- $A(x-\varepsilon z) = b$
- $(x-\varepsilon z) \geq 0$
- $(x-\varepsilon z)$ hat weniger positive Einträge als x

Also kann D verkleinert werden.

Diese Konstruktion wird wiederholt, bis (a) oder (b) eintreten.

#