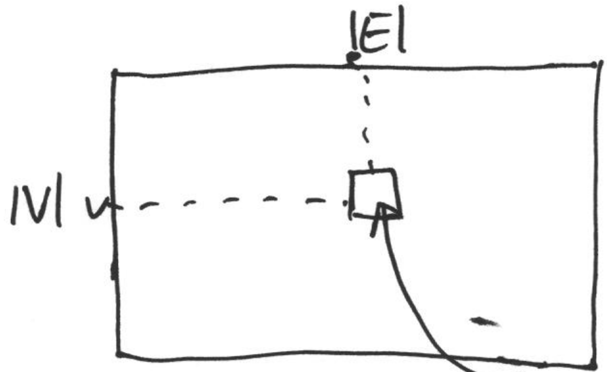
kompakter:

$$\begin{cases} \max & \mathbb{1}^T x \\ \text{s.t.} & Ax \leq \mathbb{1} \\ & x \in \{0,1\}^E \end{cases}$$

mit A Knoten-Kanten-Inzidenzmatrix



$$A_{ve} = \begin{cases} 1 & \text{wenn } e \text{ inzident zu…} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Bedeutung von <u>Schranken</u>: Etwas kann nicht besser werden als etwas anderen

(1) $\Rightarrow$ Beweis für Optimalität (wenn gleich)

(2) $\Rightarrow$ Beweis für Güte (wenn Abstand klein)

Vertex Cover in $G=(V,E)$

$\hat{=}$ Knotenmenge $U \subseteq V$ so, dass jede Kante $e \in E$ zu einem (o. mehr) Knoten aus U inzident ist.

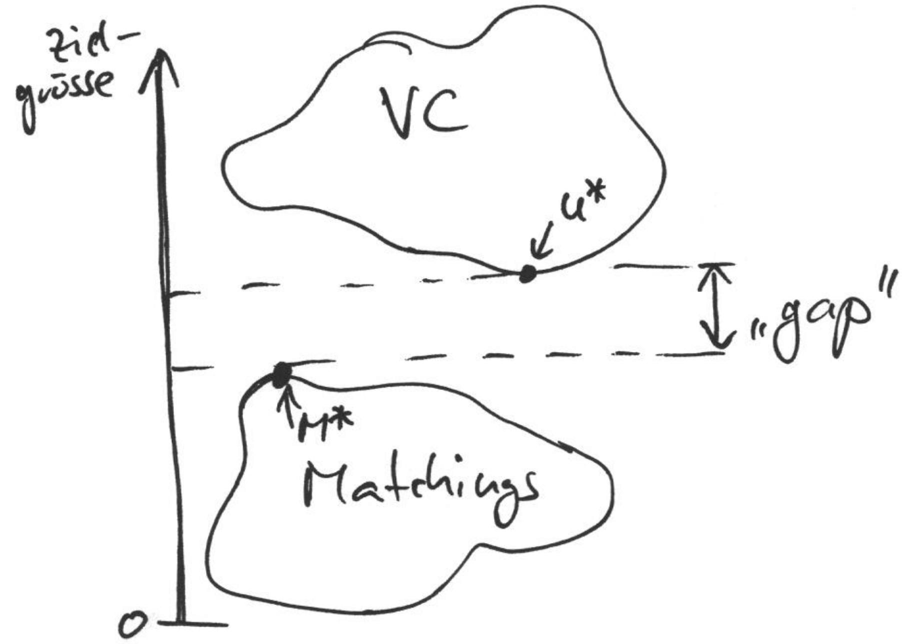
<u>Satz 1.3</u> $G=(V,E)$ gegeben.

$$\max_{M \text{ Matching}} |M| \leq \min_{U \text{ Vert.Cov.}} |U|.$$

<u>Beweis</u> Sei M^* optimales Matching. Ein VC muss alle Kanten aus M^* überdecken.
Es gibt keinen Knoten, der zu mehr als einem Matchingkante adjazent ist
$\Rightarrow$ Jedes VC muss mindestens $|M^*|$ Knoten verwenden.

#

Situation:



Also: Max-Matching und Min-VC definieren Schranken füreinander, sie sind „dual zueinander".

Geht so etwas auch mit Schokolade?

Zur Wdh (etwas anders hingeschrieben)

$$\begin{cases} \max & 40x_1 + 30x_2 \\ \text{s.t.} & 6x_1 + 6x_2 \le 30 \\ & 2x_1 + 4x_2 \le 16 \\ & 2x_1 \le 6 \\ & -x_1 \le 0 \\ & -x_2 \le 0 \end{cases}$$

$$\text{bzw} \begin{cases} \max & c^T x \\ \text{st} & Ax \le b \end{cases}$$

Wir kennen Lösung $x_1^* = 2$, $x_2^* = 3$ mit $c^T x^* = 230$.

Jede zulässige Lösung (x_1, x_2) erfüllt

$$\begin{cases} 6x_1 + 6x_2 \leq 30 \\ 2x_1 + 4x_2 \leq 16 \end{cases}$$ (und mehr...)

Also auch $(\cdot 5)$

$$\begin{cases} 30x_1 + 30x_2 \leq 150 \\ 10x_1 + 20x_2 \leq 80 \end{cases}$$

Also auch $(+)$

$$\underbrace{40x_1 + 50x_2}_{\text{!!! Das ist unser } c^T x\text{ !}} \leq 230 .$$

Also kann es keine Lösung mit $c^T x > 230$ geben, also ist 230 eine Schranke, also ist (x_1^*, x_2^*) optimal!

Allg: Gegeben

$$(P) \begin{cases} \max\ c^T x \\ \text{s.t. } Ax \leq b \end{cases}$$

beobachte: Für $u \geq 0$ ist $(u^T A)x \leq (u^T b)$ eine nicht-negativ skalierte und aufsummierte Ungleichung, wird also von allen x erfüllt!

Ang, wir finden ein $u \geq 0$ mit $u^T A = c^T$

Dann gilt $(u^T A) x \leq (u^T b) \quad \forall x$ zulässig

$$\Rightarrow c^T x \leq \underbrace{u^T b}_{\text{hängt nicht von } x \text{ ab!!}} \quad \forall x \text{ zulässig}$$

$\Rightarrow$ u definiert eine Schranke für (P)!

Was ist die beste Schranke? Kleines $u^T b$!

$$\rightsquigarrow \quad (D) \begin{cases} \min & u^T b \\ \text{s.t.} & u^T A = c^T \\ & u \geq 0 \end{cases}$$

Ist ein LP.

Damit haben wir zwei Optimierungsprobleme, die sich gegenseitig beschränken!

Satz 1.4 („Schwache Dualität")

Seien
$$(P)\begin{cases} \max & c^T x \\ \text{s.t.} & Ax \leq b \end{cases}$$

und
$$(D)\begin{cases} \min & u^T b \\ \text{s.t.} & u^T A = c^T \\ & u \geq 0 \end{cases}$$

beide zulässig (d.h. es gibt ein x und u, die (P) bzw (D) erfüllen).

Dann ist $c^T x \leq u^T b$

und <u>insb</u> $\max\limits_{(P)} c^T x \leq \min\limits_{(D)} u^T b$.

<u>Achtung</u> Man kann (D) natürlich auch als
$$\begin{cases} \min & (b^T) u \\ \text{s.t.} & (A^T) u = c \\ & u \geq 0 \end{cases}$$
schreiben (dann sieht man auch sofort, dass es ein LP ist).
Für das Verständnis von Dualität ist das aber kontraproduktiv!!

Kapitel 2 – LPs und ihre Lösungen

LPs bestehen aus

1. Zielfunktion $\min c^T x$
   $\max c^T x$
   / (keine, es ist nur ein zulässiger Punkt gesucht)

2. Restriktionen $Ax \leq b$
   $Ax \geq b$
   $Ax = b$

3. Variablenrestriktionen
   $x \geq 0$
   x frei
   ($x \in \mathbb{Z} \to$ IPs, nicht in diesem Kapitel)

All dies kann gemischt und ineinander <u>transformiert</u> werden!

Achtung: Alles <u>linear</u>! A, b, c sind numerische Konstanten.

Multiplikation von Variablen geht damit z.B. nicht!

Zielfkt

$$\begin{tikzcd} & \text{keine} \arrow[dl] \arrow[dr, "\text{keine} \,\hat{=}\, \max 0^T x"] & \\ \min \arrow[rr, leftrightarrow, "\max c^T x \,\hat{=}\, \min (-c)^T x"'] & & \max \end{tikzcd}$$

(Tatsächlich geht auch max/min $\rightsquigarrow$ keine

$$\begin{tikzcd} & \text{keine} \arrow[dl, leftrightarrow] \arrow[dr, leftrightarrow] & \\ \min \arrow[rr, leftrightarrow] & & \max \end{tikzcd}$$

Aber dazu brauchen wir „starke Dualität"
– später!)

Restriktionen

$$\begin{tikzcd} & = \arrow[dl, leftrightarrow] \arrow[dr, leftrightarrow] & \\ \leq \arrow[rr, leftrightarrow] & & \geq \end{tikzcd}$$

$\leq \leftrightarrow \geq$: $Ax \leq b \iff (-A)x \geq (-b)$

$= \to \leq$ $\quad Ax = b \iff \begin{cases} Ax \leq b \\ (-A)x \leq (-b) \end{cases}$

$\leq$ → $=$ Durch Einführen von „Schlupfvariablen" s:

$$Ax \leq b \iff \begin{cases} Ax + Is = b \\ s \geq 0 \end{cases}$$

<u>Variablen</u>

≥ 0 → frei : Deklariere $x \geq 0$ als Restriktion $Ix \geq 0$

≥ 0 ← frei : Splitte jedes x_i in einen "positiv"- und einen "negativ"-Anteil x_i^+, x_i^-.
Setze $x_i := x_i^+ - x_i^-$ mit $x_i^+, x_i^- \geq 0$

Bsp: $\underset{x \text{ frei}}{Ax \leq b} \rightsquigarrow \begin{array}{c} A(x^+ - x^-) \leq b \\ x^+, x^- \geq 0 \end{array}$

$$\Downarrow$$

$$\begin{array}{c} Ax^+ + (-A)x^- \leq b \\ x^+ \geq 0 \quad x^- \geq 0 \end{array}$$

≥ 0 ↔ ≤ 0 trivial