MMA

Kapitel 1 — Einführung

Themen insbesondere: Lineare Programme und der Simplex-Algorithmus.

Beispiel 1.1 Produktion von leckerer Schokolade.

Im nächsten Planungszeitraum können zwei Schokosorten produziert werden.

Ausgangsmaterialien:

Schokogrundmasse: kostet 5 €/kg, max 30 T beschaffbar

Nüsse: 5 €/kg, max 16 T beschaffbar

Rosinen/Trauben 10 €/kg, max 6 T beschaffbar

Produkte:

1 Trauben-Nuss-Schoki (Verkauf zu 1 €/100g)

Besteht aus ~~6~~ 6 Teilen Schokomasse,
2 Teilen Nüssen,
2 Teilen Trauben

2 Nuss-Schoki (Verkauf 1 €/100g)

6 Teile S
~~?~~ 4 N
0 T

Formulierung als LP („Lineares Programm")

Sei x_1 die Menge zu produzierende T-N-S
(in 10T = 100.000 Tafeln)

x_2 —″— N-S.

Gewinn für 1:
$x_1 \cdot 100$ T€ (Einnahme)
$-x_1 \cdot 6 \cdot 5$ T€ (Kosten S)
$-x_1 \cdot 2 \cdot 5$ T€ (Kosten N)
$-x_1 \cdot 2 \cdot 10$ T€ (Kosten T)

$40 x_1$ T€.

Gewinn für 2
$x_2 \cdot 100$ T€
$- x_2 \cdot 6 \cdot 5$ T€ (S)
$- x_2 \cdot 4 \cdot 5$ T€ (N)
$- x_2 \cdot 0 \cdot 10$ T€ (T)

$50 x_2$ T€

$\Rightarrow$ Gesamtgewinn $40\,x_1 + 50\,x_2$ (in T€)

Dafür brauchen wir

$6x_1 + 6x_2$ T Schoki (haben ≤ 30 T!)

$2x_1 + 4x_2$ T Nüsse (≤ 16 T!)

$2x_1$ T Trauben (≤ 6 T!)

Also zu lösen:

$$
\begin{cases}
\max & 40x_1 + 50x_2 & & [c] \\
\text{subject to} & 6x_1 + 6x_2 \leq 30 & & [S] \\
& 2x_1 + 4x_2 \leq 16 & & [N] \\
& 2x_1 \leq 6 & & [T] \\
& x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 & &
\end{cases}
$$

Das ist ein LP!

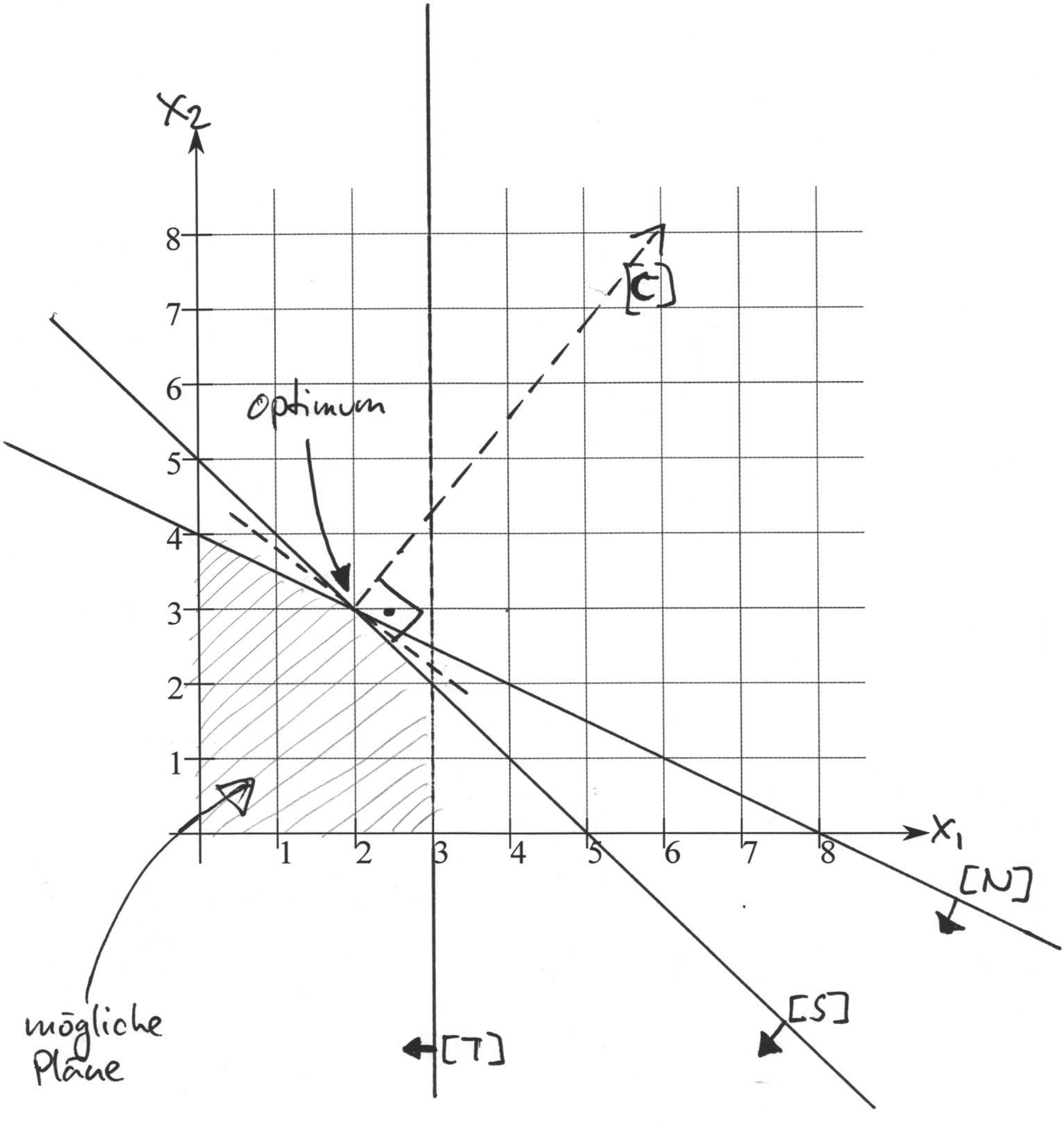
Wie sieht sowas aus?

Was ist der beste Produktionsplan?

Optimum:

$x_1 = 2, \; x_2 = 3$

Gewinn: 230 T€.



Anders aufgeschrieben:

$$
\begin{cases}
\max & \underbrace{\begin{pmatrix} 40 \\ 50 \end{pmatrix}}_{c}^{T} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\[2em]
\text{s.t.} & \overbrace{\begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 2 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}}^{A} \overbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}^{x} \leq \overbrace{\begin{pmatrix} 30 \\ 16 \\ 6 \end{pmatrix}}^{b} \\[2em]
 & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{cases}
$$

$$\Big\downarrow \text{Matrixschreibweise}$$

$$
\begin{cases}
\max & c^T x \\
\text{s.t.} & Ax \leq b \\
 & x \geq 0 .
\end{cases}
$$

(Eine) Standardform von LPs.

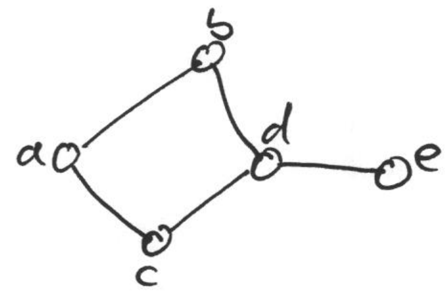
Beispiel 1.2

Max Matching

Gegeben: Graph $G = (V, E)$

Gesucht: $M \subseteq E$ so dass kein Knoten zu >1 Kante in M adjazent.

Zielfunktion: $|M|$ maximal.



Variable $x_{ab} = \begin{cases} 1 & \text{wenn } ab \in M \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

$$\hookrightarrow \left\{ \begin{array}{lll} \max & x_{ab} + x_{ac} + x_{bd} + x_{cd} + x_{de} & \\ \text{s.t.} & x_{ab} + x_{ac} \leq 1 & (a) \\ & x_{ab} + x_{bd} \leq 1 & (b) \\ & x_{ac} + x_{cd} \leq 1 & (c) \\ & x_{bd} + x_{cd} + x_{de} \leq 1 & (d) \\ & x_{de} \leq 1 & (e) \\ & x_e \in \{0,1\} \quad \forall e \in E & \end{array} \right.$$

„ganzzahlig lineares Programm"

(IP, „Integer Program")

(oder ILP)