

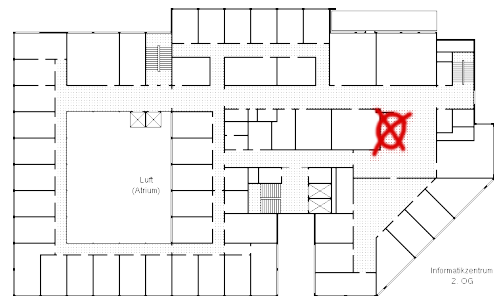
Dr. Alexander Kröller
 Max Pagel

Mathematische Methoden der Algorithmik Übung 4 vom 10. 01. 2011

Abgabe der Lösungen am Mittwoch, den
 19. 1. 2011, entweder

- in der Vorlesung im PK 2.2, oder
- bis 14:45 im Hausaufgabenrückgabeschrank.

Bitte die Blätter vorne deutlich mit eigenem Namen versehen!



Aufgabe 1 (Umrechnungstabelle für Minimierungsprobleme): In der Vorlesung wurden folgende Umrechnungsregeln gegeben, um das duale Problem zu einem Maximierungs-LP der Form:

$$\begin{aligned} &\max c^T x \\ &\text{s.t. } Ax \leq b \end{aligned}$$

zu formulieren:

Primal	Dual
$x \geq 0$	$\geq - \text{Ungleichung}$
$x \text{ Frei}$	Gleichung
$\leq - \text{Ungleichung}$	$u \geq 0$
Gleichung	$u \text{ Frei}$
$\geq - \text{Ungleichung}$	$u \leq 0$

Leite die entsprechende Tabelle für Minimierungsprobleme der Form:

$$\begin{aligned} &\min c^T x \\ &\text{s.t. } Ax \leq b \end{aligned}$$

her

(5 P.)

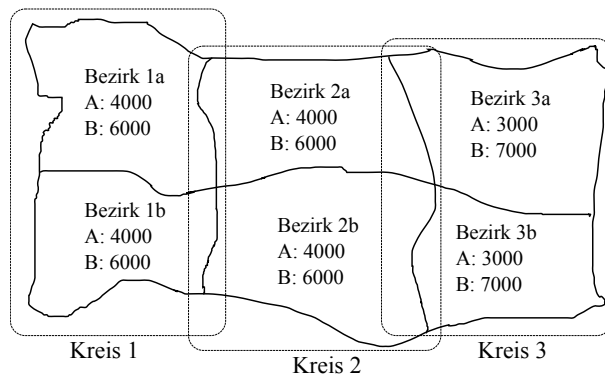
Aufgabe 2 (Gerrymandering): Stellen wir uns einmal vor, wir seien die Parteistrategen der derzeit regierenden Partei A. Die einzige Konkurrenzpartei ist B.

Unsere Partei hat leider in der vergangenen Zeit nur Mist produziert, unsere Zustimmung ist auf einem historischen Tiefstand von 25,01%. Zum Glück sind wir noch Regierungspartei und können daher, dank Gerrymandering¹, bei der anstehenden Wahl trotzdem gewinnen!

¹Wer das hier für zynisch hält, möge bitte „gerrymandering“ googeln...

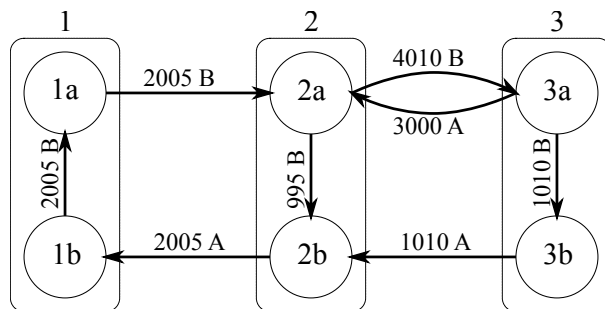
Das funktioniert folgendermassen: Unser Wahlsystem ist indirekt. Es gibt Wahlkreise, in denen jeweils ein Wahlmann mittels einfacher Mehrheit bestimmt wird. Die Wahlmänner der Wahlkreise bestimmen wiederum den Wahlgewinner. Die Wahlkreise sind in Wahlbezirke aufgeteilt, der Einfachheit halber so, dass jeweils 10000 Wähler zu einem Wahlbezirk gehören.

Zum Beispiel könnte die Situation folgendermassen aussehen: Es gibt drei Wahlkreise 1, 2 und 3, die in jeweils zwei Wahlbezirke á 10000 Wähler aufgeteilt sind.



Unsere Partei wird in jedem der drei Wahlkreise von B geschlagen (in Kreis 1 mit 8000:12000 Stimmen, in 2 ebenfalls, in 3 mit 6000:14000). Also kommen alle drei Wahlmänner aus Partei B und wählen natürlich B zur Siegerpartei.

Jetzt kommt das Gerrymandering: Da wir die Wahlmodalitäten bestimmen, können wir unter irgendeinem Vorwand die Grenzen der Wahlbezirke verschieben, wodurch wir die Wähler anderen Wahlbezirken zuordnen können. Natürlich wissen wir genau, wie die einzelnen Leute stimmen werden. Wir ordnen die Grenzen so, dass Wähler folgendermassen wandern:



Jetzt haben immer noch alle Wahlbezirke 10000 Wähler — wir haben also nichts schlimmes gemacht. Allerdings gewinnen wir jetzt Wahlkreis 1 mit 10005:9995 Stimmen, 2 mit 10005:9995 Stimmen und verlieren 3 mit 1990:18010 Stimmen. Damit stellen wir 2 der 3 Wahlmänner selbst und gewinnen die Wahl. Es werden 6015 A-Wähler anderen Bezirken zugeordnet. Denen schicken wir ein nettes Infopaket, damit sie nicht auf falsche Gedanken kommen und B wählen. Den 10025 verschobenen B-Wählern schicken wir nichts, die sind uns ja schliesslich egal.

- a) Formuliere ein LP für folgendes Problem: Es soll bestimmt werden, wie Wähler zwischen den Wahlbezirken verschoben werden sollen, so dass
 - Die Grösse der Wahlbezirke nicht verändert wird.

- In einer vorgegebenen Teilmenge der Wahlkreise (typischerweise werden das $|K|/2 + 1$ sein) die Wahl mit einem Vorsprung von jeweils mindestens 10 Stimmen gewonnen wird.
- So wenige A-Wähler wie möglich verschoben werden. (Hierbei ist es o.k., wenn ein A-Wähler, der über mehrere Wahlbezirke geschoben wird, auch mehrfach gezählt wird)

Hierbei lassen wir (eigentlich unkorrekt) auch fraktionale Wählerwanderungen zu. Bei 10000 Personen je Wahlbezirk kommt es auf den Einzelnen nicht mehr an.

- b) Auf der VL-Homepage finden sich die ZIMPL-Dateien `gerry1.zpl` und `gerry2.zpl`. Gerry1 beschreibt das oben genannte Beispiel, um Euch den Einstieg zu erleichtern. Gerry2 ist ein grösseres Szenario (100 Wahlkreise, 10000 Wahlbezirke. 100 Mio Wähler, von denen 25,01% A wählen).

Beide ZIMPL-Dateien definieren die folgenden Parameter:

<code>KREISE</code>	Menge aller Wahlkreise.
<code>WINKREISE</code>	Menge derjenigen Wahlkreise, die wir gewinnen wollen.
<code>KBEZ[k]</code>	Menge aller Wahlbezirke, die dem Wahlkreis k zugeordnet sind.
<code>BEZIRKE</code>	Menge aller Wahlbezirke.
<code>N[b]</code>	Menge aller Nachbarbezirke von Wahlbezirk b (also aller Bezirke, mit denen man durch Grenzverschiebungen Wähler austauschen kann).
<code>A[b]</code>	Anzahl Wähler von Partei A in Bezirk b . (Alle anderen <code>SIZE-A[b]</code> wählen B).
<code>E</code>	Menge aller gerichteter Tauschkanten: Wenn b_1 und b_2 benachbarte Bezirke sind, sind die Paare $\langle b_1, b_2 \rangle$ und $\langle b_2, b_1 \rangle$ in <code>E</code> .
<code>SIZE</code>	Anzahl Wähler je Wahlbezirk (also 10000).

Erweitere `gerry2.zpl` so, dass es das LP aus Teil a) enthält. Löse das Problem mit ZIMPL und CPLEX. (Wieviele Variablen und wieviele Nebenbedingungen hat deine Formulierung?)

Abzugeben sind hier bitte keine Ausdrücke der ganzen Dateien, sondern nur der von dir geschriebene ZIMPL-Code sowie das `cplex.log`.

Achtung: Bei meiner Lösung brauchte ZIMPL 7 Minuten für die Konvertierung des `.zpl` in `.lp` — also geduldig sein!

(2,5 + 2,5 P.)