Abteilung Algorithmik **Winter '10**
Institut für Betriebssysteme und Rechnerverbund
TU Braunschweig

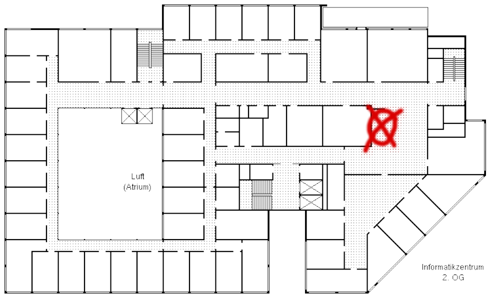
Dr. Alexander Kröller
Max Pagel

Mathematische Methoden der Algorithmik
Übung 2 vom 22. 11. 2010

Abgabe der Lösungen am Mittwoch, den 01. 12. 2010, entweder

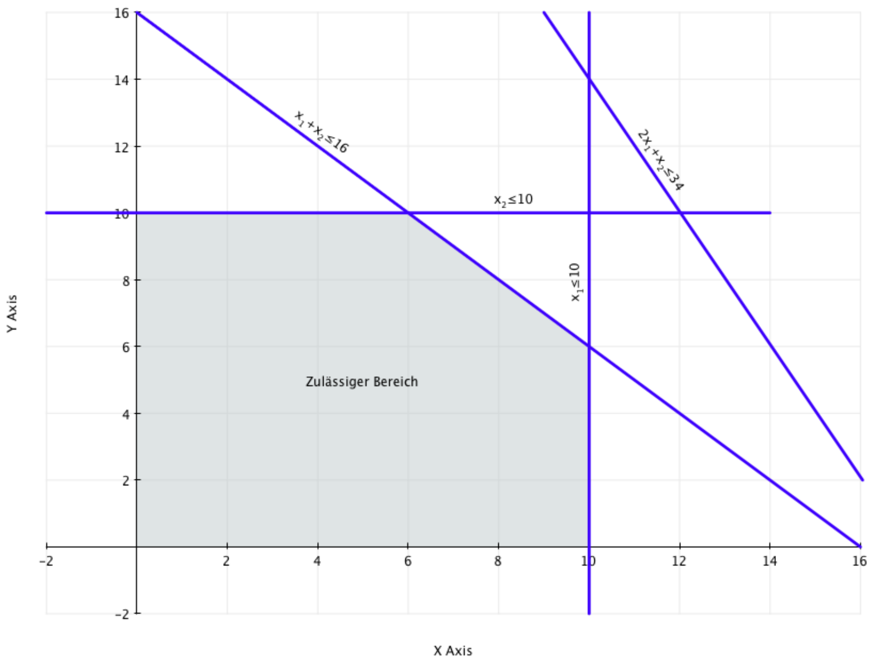
- in der Vorlesung im PK 2.2, oder
- bis 14:45 im Hausaufgabenrückgabeschrank.

Bitte die Blätter vorne deutlich mit eigenem Namen versehen!



Aufgabe 1 (LP grafisch): Wir betrachten noch einmal das lineares Optimierungsproblem vom letzten Übungsblatt:

$$
\begin{array}{rrcrcr}
\max & x_1 & + & 2x_2 & & \\
\text{unter} & x_1 & + & x_2 & \leq & 16 \\
 & 2x_1 & + & x_2 & \leq & 34 \\
 & x_1 & & & \leq & 10 \\
 & & & x_2 & \leq & 10 \\
 & x_1, & & x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$



a) Bestimme (algebraisch) alle Basislösungen. Welche davon sind zulässig?

b) Zeichne die Projektionen der Basislösungen in das zweidimensionale Bild der zulässigen Lösungen. Markiere die zulässigen Basislösungen.

c) Gibt es degenerierte Basislösungen?

(2+0,5+0,5 P.)

Aufgabe 2 (Umformung linearer Programme): Gegeben ist das lineare Programm

$$\begin{array}{llcll} \min & -c^T x & - & d^T y & \\ & -Ax & & & \leq -a \\ & & & -By & = -b \\ & -x & & & \leq 0. \end{array}$$

Reduziere dieses Problem auf eines der folgenden einfacheren Form:

$$\begin{array}{lrcl} \max & g^T z & & \\ & Fz & \leq & f \\ & z & \geq & 0, \end{array}$$

Das heißt also, bringe das erste Problem in die Form des zweiten, indem g, F, f und z in Abhängigkeit von den Daten des ersten Problems beschrieben werden, so dass jede zulässige Lösung des einen Problems einer zulässigen Lösung des anderen Problems entspricht; insbesondere sollen die Optimalwerte einander entsprechen, falls es zulässige Lösungen gibt. **(2 P.)**

Aufgabe 3 (Sandlieferant): Bob der Baumeister ist zufrieden. Er hat seine vier wichtigsten Baumaschinen auf vier Baustellen verteilt, wo sie (ausnahmsweise) selbständig arbeiten dürfen. Er will eigentlich gerade den Bauhof abschliessen und nach Hause gehen, als ihn ganz aufgeregt seine Baumaschinen anrufen. Zwar arbeiten sie alle ganz fleissig, aber der Bausand geht zur Neige! Auf Heppos und Buddels Baustellen fehlen je 100T, auf Rollos und Mixis jeweils 50T, also insgesamt 300T Sand.
Der Transport des Sands zu den Baustellen ist natürlich nicht ganz preiswert. Bob hat zwar ausreichend Sand zur Verfügung allerdings ist es vom Bauhof aus so weit, dass Bob einen Verlust einfahren würde. Bob ist verzweifelt.
Da fällt ihm ein: Zum Glück lagern noch 80T auf Wendys Bauhof und 50T bei Bauer Gurke, und beide sind so nah an den Baustellen, dass noch ein Gewinn übrig bleibt!
Die Gewinne (bzw. Verluste) bei der Lieferung von 1T Sand lauten wie folgt:

von ... nach	Heppo	Buddel	Rollo	Mixi
Bob	-1	-2	-3	-4
Wendy	10	12	11	8
Bauer Gurke	8	16	14	15

Jetzt müsste man nur noch wissen, ob man irgendwie den Sand so herumkarren kann, dass unterm Strich kein Verlust entsteht. Ein möglichst hoher Gewinn wäre natürlich noch besser! „Können wir das schaffen?“ ruft Bob ins Telefon, und „Yo, wir schaffen das!“ schallt es vierfach zurück.

a) Stelle ein LP auf, das dieses Problem löst und den Gewinn maximiert.

b) Löse das Problem mit CPLEX. (Zur Abgabe gehört also: 1. Die Eingabedatei für CPLEX; 2. Die Logdatei `cplex.log`; 3. Das Ergebnis)

(1+1 P.)

Aufgabe 4 (Ich packe meinen Koffer): Ich befinde mich im Urlaub auf einem Basaar. Mir fällt auf, dass ich noch einen zweiten Koffer mit in den Flieger nach Hause nehmen kann, sofern er maximal 31kg wiegt. An dem Stand, an dem ich stehe, gibt es verschiedene Dinge, die ich mit nach Hause schmuggeln und dann gewinnbringend auf Ebay verkaufen könnte. Natürlich sind nicht alle Dinge beliebig oft verfügbar. Im Einzelnen stehen folgende „Originalprodukte“ zur Verfügung:

Produkt	Gewicht	Gewinn	Verfügbar
Jadestatue	8 kg	150 €	7
Kuckucksuhr	4 kg	50 €	2
Blöder Bildband	3 kg	30 €	192
Tee	0,750 kg	6 €	12
Plastikspielzeug	0,200 kg	1 €	8
Halskette	0,100 kg	2 €	10

a) Stelle ein ILP auf, das den zu erwartenden Gewinn maximiert. Löse es mit CPLEX. (Abgabe: Eingabedatei; Logdatei; Lösung)

b) Nimm an, man könnte fraktionale Anteile mitnehmen (also z.B. 0,72 Jadestatuen mit einem Gewicht von $0{,}72 \cdot 8$ kg und einem Gewinn von $0{,}72 \cdot 150$€. Löse dieses Problem mit CPLEX (Abgabe: Eingabedatei; Logdatei; Lösung)

c) Betrachte die „Gewichtsdichten“ der einzelnen Produkte (also Gewinn pro Gewicht in €/kg). Untersuche die Lösungen aus a) und b) auf Zusammenhänge zur Dichte. Was fällt auf? Worin unterscheiden sich die Lösungen?

(1+1+1 P.)