

## Algorithmen und Datenstrukturen

### Übung 5 vom 20.01.2011

Abgabe der Lösungen am Mittwoch, den 03.02.11, vor der Abteilung *Algorithmik*.  
Bitte die Blätter vorne deutlich mit eigenem **Namen** und **Gruppennummer** versehen!

#### Aufgabe 1 (Klausurvorbereitung):

Gib Deinen Namen (Format: Nachname, Vorname), Matrikelnummer und Studiengang (mit Zusatz Bachelor, Master, Diplom!) *leserlich* an.

Diese Angaben brauchen wir für die Weiterleitung der Klausurergebnisse, also gebt euch Mühe ;-).

(2 Punkte)

#### Aufgabe 2 (AVL-Bäume):

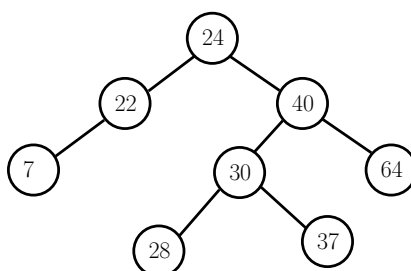


Abbildung 1: Der AVL-Baum  $T$ .

Gegeben sei der AVL-Baum  $T$  aus Abbildung 1. Füge nacheinander die Elemente 23 und 26 ein, so dass  $T$  ein AVL-Baum bleibt; gib den Baum nach jeder Einfüge-Operation an. (Hinweis: Nach *jedem* Einfügen soll der geänderte Baum ein AVL-Baum sein. Zum Schluss sollen beide Zahlen eingefügt sein.)

(16 Punkte)

#### Aufgabe 3 (Fibonacci-Zahlen und Goldener Schnitt):

Im Jahre 1202 beschrieb Leonardo von Pisa (genannt Fibonacci, Sohn des Bonacci) in seinem Buch *Liber Abaci* das Wachstum einer Population von Kaninchen. Ein neugeborenes Paar Kaninchen braucht zwei Monate, um eigenen Nachwuchs zu produzieren. Wenn man also im ersten Monat mit einem Paar startet, dann ergibt sich die Rekursionsbeziehung

$$F_n = \begin{cases} 1 & \text{falls } n = 1, 2, \\ F_{n-1} + F_{n-2} & \text{falls } n \geq 3. \end{cases}$$

(a) Gib die ersten 15 Fibonacci-Zahlen an; bestimme jeweils  $\frac{F_n}{F_{n-1}}$ .

(b) Zeige durch Induktion:

$$F_n = \frac{(1 + \sqrt{5})^n - (1 - \sqrt{5})^n}{2^n \sqrt{5}}.$$

(c) Der sogenannte *Goldene Schnitt*  $\phi$  ergibt sich daraus, dass man eine Strecke der Länge  $c$  so in zwei Teile  $a \leq b$  teilt, dass  $b/a = c/b = \phi$  gilt. Der Goldene Schnitt spielt in vielen Bereichen von Kunst und Ästhetik eine Rolle, hat aber auch seinen Platz in der Mathematik.

Zeige:  $\phi$  erfüllt die Gleichung  $\phi(\phi - 1) = 1$ ; bestimme die Lösung  $\phi > 1$ .

(2+10+10 Punkte)

#### Aufgabe 4 (Mergesort):

Sortiere die Sequenz (10, 9, 23, 15, 8, 7, 7, 2) mit Hilfe von Mergesort. Gib die Zwischenschritte in geeigneter Form an.

(20 Punkte)

#### Aufgabe 5 (Mastertheorem):

Diese Aufgabe wird nicht bewertet, ihr Bearbeitung wird dennoch empfohlen! Die Aufgaben werden in der großen Übung am 03.02.2011 durchgerechnet.

a) Bestimme mit Hilfe des Mastertheorems das asymptotische Wachstum der Rekursion

$$T(n) = 256 \cdot T\left(\frac{n}{4}\right) + n^3.$$

b) Bestimme mit Hilfe des Mastertheorems das asymptotische Wachstum der Rekursion

$$T(n) = 27 \cdot T\left(\frac{n}{3}\right) + n^3.$$

c) Bestimme mit Hilfe des Mastertheorems das asymptotische Wachstum der Rekursion

$$T(n) = 3 \cdot T\left(\frac{n}{4}\right) + n^2.$$