

Algorithmen und Datenstrukturen Übung 3 vom 15.12.2010

Abgabe der Lösungen am Mittwoch, den 05.01.11, bis 11:25 Uhr vor der Abteilung
Algorithmik.

Bitte die Blätter vorne deutlich mit eigenem Namen und Gruppennummer versehen!

Aufgabe 1 (O-Notation):

In der Vorlesung wurde die O -Notation zur Abschätzung der Laufzeit eingeführt.

- a) Suche für die folgenden Funktionen jeweils geeignete Konstanten c (bzw. c_1 und c_2) und n_0 und zeige mit Hilfe dieser Konstanten, dass die jeweilige Funktion in der angegebenen Klasse liegt.

$$f_1(n) = \frac{n^{14}}{4^n} \in O(1)$$

$$f_2(n) = 2n^2 + 3n + 1 \in O(n^3)$$

$$f_3(n) = \sum_{i=1}^n i \in \Theta(n^2)$$

- b) Kreuze an, in welchen Klassen die jeweilige Funktion liegt.

$f(n)$	$O(1)$	$O(n)$	$O(2^n)$	$\Omega(1)$	$\Omega(n)$	$\Omega(2^n)$	$\Theta(1)$	$\Theta(n)$	$\Theta(2^n)$
57									
$3n - 40$									
$n \log n$									
n^n									
$\sum_{i=0}^n q^i, q < 1$									

(9+6 Punkte)

Aufgabe 2 (O-Notation die II.):

Beweise Satz 3.12 aus der Vorlesung: Seien $f, g : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}$ zwei Funktionen. Dann gilt:

(i) $f \in \Theta(g) \Leftrightarrow g \in \Theta(f)$

(ii) $f \in \Theta(g) \Leftrightarrow f \in O(g)$ und $f \in \Omega(g)$

(iii) $f \in O(g) \Leftrightarrow g \in \Omega(f)$

(5+5+5 Punkte)

Aufgabe 3 (O-Notation): Gegeben seien folgende zwei Algorithmen:

- Algorithmus 1 mit einer Laufzeit von $O(f(n))$
- Algorithmus 2 mit einer Laufzeit von $O(g(n))$

a) Sei der Algorithmus 3 wie folgt definiert:

```
BEGIN  
  Führe Algorithmus 1 aus  
  Führe Algorithmus 2 aus  
END
```

Zusätzlich gelte $f(n) \in \Omega(g(n))$.

Welche Laufzeit hat der Algorithmus 3? Nutze dabei aus, dass $f(n) \in \Omega(g(n))$ gilt. Beweise Deine Aussage!

b) Sei der Algorithmus 4 wie folgt definiert:

```
BEGIN  
  IF  $n \geq 30$   
    Führe Algorithmus 1 aus  
  ELSE  
    Führe Algorithmus 2 aus  
  END IF  
END
```

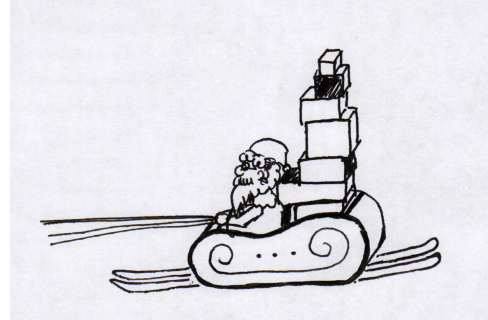
Welche Laufzeit hat der Algorithmus 4? Beweise Deine Aussage!

(8+6 Punkte)

Aufgabe 4 (Ein Weihnachtspäckchenproblem):

Es ist der 24. Dezember. Der Schlitten des Weihnachtsmannes steht bereits auf dem zugefrorenen See bereit und seit Stunden haben die Engel die Pakete fein säuberlich so aufeinander gestapelt, dass der Weihnachtsmann auf seiner Fahrt immer nur das oberste greifen muss.

Nur noch eine Stunde verbleibt bis zur Abfahrt, die Rentiere werden bereits angespannt, da fällt Engel Ariel beim Betrachten der fragilen Geschenkstruktur auf, dass sie dieses Jahr die Schleifen für die Geschenke ganz vergessen haben. Die umstehenden Engel fangen an durcheinanderzureden und Vorschläge vorzubringen, wie die Schleifen doch noch angebracht werden können—und am Ende die Pakete wieder als der Turm aufeinanderliegen, in dem sie jetzt stehen.



Engel Baliet schlägt vor, je das oberste Paket herunter zu nehmen, Band und Schleife zu befestigen und das Paket dann wieder nach ganz unten zu packen. Band und Schleife sind 7 schnelle Handgriffe, aber um eines der n Pakete auf dem Stapel nach ganz unten zu packen, müssen alle Pakete darüber mindestens einmal angefasst werden.

Engel Cahetel denkt, er hat eine bessere Idee: die Pakete werden von oben vom Stapel abgenommen, jeweils mit einer Schleife versehen, und dann in einer Reihe aufs Eis “geschossen” (das sind dann 8 anstelle der oben genannten 7 Handgriffe pro Paket)—das oberste am weitesten weg usw. Am Ende will er dann einmal mit dem Schlitten an den Paketen entlang fahren, und sie wieder alle aufschichten.

Für n gegebene Pakete (und das sind natürlich viele—die ganze Welt will beschenkt werden), betrachten wir die Vorschläge von Engel Baliet und Cahetel als Algorithmus B und C.

- (a) Welche Laufzeit hat der Algorithmus B? Begründe Deine Aussage.
- (b) Welche Laufzeit hat der Algorithmus C? Begründe Deine Aussage. Hatte Engel Cahetel Recht?

(8+8 Punkte)

...Frohe Weihnachten und einen guten Rutsch!