Abteilung Algorithmik
Institut für Betriebssysteme und Rechnerverbund **WS 10/11**
TU Braunschweig

Prof. Dr. Sándor Fekete
Christiane Schmidt

Algorithmen und Datenstrukturen
Übung 1 vom 17.11.2010

Abgabe der Lösungen am Mittwoch, den 01.12.10, bis 11:25 Uhr vor der Abteilung *Algorithmik*.
Bitte die Blätter vorne deutlich mit eigenem Namen und Gruppennummer versehen!

Aufgabe 1 (Ägyptische Bruchrechnung):
In Ägypten gab es zur Darstellung von Brüchen (mit Ausnahme des Bruches $\frac{2}{3}$) nur Brüche des Typs $\frac{1}{n}$, also nur Symbole für die Darstellung von *Stammbrüchen*.
Ein für uns heute geläufiger Bruch der Form $\frac{a}{b}$ wurde daher als Summe von Stammbrüchen dargestellt, z.B.:

$$\frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}. \tag{1}$$

Die Frage ist: wie kommen wir auf eine solche Darstellung?
Betrachte dazu den folgenden Algorithmus:

Gegeben: ein gewöhnlicher Bruch $\frac{a}{b}$.
Gesucht: eine Stammbruchzerlegung.

(1) Man suche den größten Stammbruch, der kleiner oder gleich $\frac{a}{b}$ ist; dies sei der Stammbruch $\frac{1}{c}$.

(2) Man betrachte $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a}{b} - \frac{1}{c}$ (ein kleinerer Bruch). Falls $\frac{a_1}{b_1} = 0$, gehe zu (4).

(3) Fahre bei (1) fort.

(4) Stop.

Bricht der Algorithmus in (4) ab, so ist die Summe der ermittelten Stammbrüche offensichtlich eine additive Stammbruchzerlegung von $\frac{a}{b}$.

a) Ordne die Stammbrüche $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n-1}$ und $\frac{1}{n+1}$ der Größe nach an.

b) Wende den Algorithmus auf $\frac{a}{b} = \frac{9}{20}$ an. Gibt es eine Stammbruchzerlegung von $\frac{9}{20}$ mit weniger Stammbrüchen?
(Tipp:

$$x \geq \frac{1}{n} \Leftrightarrow n \geq \frac{1}{x} \tag{2}$$

Der gesuchte größte Stammbruch unterhalb von x entspricht also der kleinsten natürlichen Zahl n oberhalb von $\frac{1}{x}$.)

c) Für $\frac{a}{b} = \frac{5}{31}$ liefert der Algorithmus die folgende Zerlegung:

$$\frac{5}{31} = \frac{1}{7} + \frac{1}{55} + \frac{1}{3979} + \frac{1}{23744683} + \frac{1}{1127619917796295}. \tag{3}$$

Gib stattdessen eine Zerlegung der Form:

$$\frac{5}{31} = \frac{1}{8} + \frac{1}{30} + \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_1} \tag{4}$$

mit $c_1, c_2 > 0$ an.

d) Bei Betrachtung der Zerlegungen aus (c): bezüglich welcher möglichen Optimalitätskriterien für die ägyptische Stammbruchzerlegung ist die von Dir angegebene Zerlegung zu bevorzugen? (Nenne zwei Kriterien.)

e) Hat das Verfahren die Eigenschaften, die Donald Knuth an einen Algorithmus stellt? (Antwort mit Begründung!) Die Endlichkeit muss nicht begründet werden. Der Beweis, dass das Verfahren stets abbricht beruht auf der Beobachtung, dass die Zähler der Differenzbrüche eine streng monoton fallende Folge natürlicher Zahlen bilden.

(2+7+6+8+2 Punkte)

Aufgabe 2 (Eulerweg):

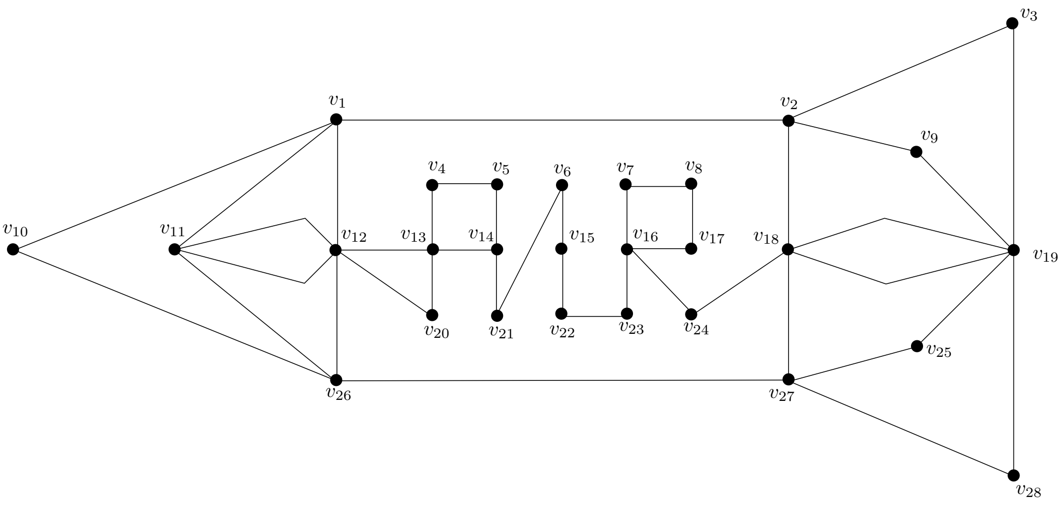

Abbildung 1: Euler auf dem Weg in den Weltraum!

Finde im Graphen in Abbildung 1 einen Eulerweg oder zeige, dass es keinen gibt.

(15 Punkte)

Aufgabe 3 (Graphen):

Wie in der Vorlesung beschrieben enthält jede Kante eines einfachen Graphen zwei Knoten. Darauf aufbauend bezeichnet man als *Grad eines Knotens* v die Anzahl der Kanten, die v enthalten. Der Grad eines Knotens v (englisch "degree") wird mit $\delta(v)$ abgekürzt. Ein Graph heißt *vollständig*, wenn es zwischen je zwei Knoten eine Kante gibt, d. h. alle möglichen Verbindungen auch vorhanden sind.

a) Zeichne einen beliebigen Graphen mit $n \geq 5$ Knoten $v_1, \ldots, v_n$ und $m \geq 10$ Kanten $e_1, \ldots, e_m$. Überprüfe, ob $\sum_{i=1}^{n} \delta(v_i) = 2m$ gilt.

b) Beweise, dass $\sum_{i=1}^{n} \delta(v_i) = 2m$ für *jeden* Graphen G mit n Knoten und m Kanten gilt.

c) Sei H ein vollständiger Graph mit n Knoten. Zeige, dass für H die Zahl der Kanten genau $\frac{n}{2}(n-1)$ beträgt.

(4+8+8 Punkte)