Gü #8 10.2.2011

I. Orga
II. Hashing
III. vollst. Induktion

I. Orga

- Klausur 22.2. → ~~genauer Zeit siehe HP + mail~~
  11.30 – 13.30 Uhr
- Raumeinteilung → siehe HP + mail
  (Audimax und Gerdnian)
- Hilfsmittel → keine
- mitzubringen: 1-Bescheinigung
  Perso

II Hashing

- mit verketteten Listen
- mit offener Adressierung

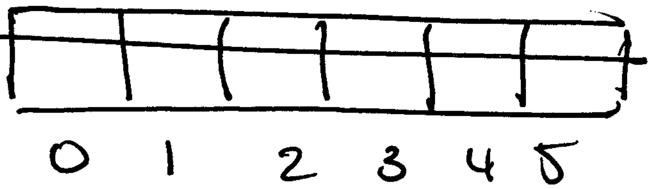
[zur Kollisionsbehandlung]

→ Hashfunktion mit „Zähler" – Nummer des Einfügeversuchs als Parameter

$t(i,x)$ = Position des i-ten Versuchs zum Einfügen von Daten x

~~Beispiel:~~

~~Schlüssel: 1, 7, 16~~



~~$t(i,x) = (x+i) \bmod 6$~~

→ Division mit Rest / Modulorechnung

zu zwei Zahlen $a, b \in \mathbb{N}$

$$a = c \cdot b + \underbrace{r}_{\text{Rest}} \quad , r \in \{0, \dots, b-1\}$$

$$(a \bmod b) = r$$

Beispiel:

$21 \bmod 4 = 1$, denn $21 = 5 \cdot 4 + 1$

Beispiel:

Schlüssel: 1, 7, 19

0	1	2	3	4	5
	1	7	19		

$t(i,x) = (x+i) \bmod 6$ $\quad i = 0, 1, \ldots$

$t(0,1) = 1$

$t(0,7) = 1$ Kollision

$t(1,7) = 2$

$t(0,19) = 1$ Kollision

$t(1,19) = 2$ Kollision

$t(2,19) = 3$

Klausuraufgabe WS 07/08

$t(i,x) = (x+i) \bmod 12$

$A[0], A[1], \ldots, A[11]$

Schlüssel: 17, 41, 6, 5, 18

$x = 17$:

$i=0$: $t(0,17) = 5$ $\quad 17 \rightarrow A[5]$

$x = 41$:

$i=0$: $t(0,41) = 5$ Kollision

$i=1$: $t(1,41) = 6$ $\quad 41 \rightarrow A[6]$

$x = 6$:

$i=0$: $t(0,6) = 6$ Kollision

$i=1$: $t(1,6) = 7$ $\quad 6 \rightarrow A[7]$

$x = 5$:

$i=0$: $t(0,5) = 5$ Kollision

$i=1$: $t(1,5) = 6$ Kollision

IV

$i=2$: $t(2,5)=7$ Kollision

$i=3$: $t(3,5)=8$ $5 \longrightarrow A[8]$

<u>$x=18$:</u>

$i=0$: $t(0,18)=6$ Kollision

$i=1$: $t(1,18)=7$ Kollision

$i=2$: $t(2,18)=8$ Kollision

$i=3$: $t(3,18)=9$ $18 \longrightarrow A[9]$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
					17	41	6	5	18		

SoSe 2010

V

5.Aufgabe: Hashing

11 Punkte

Wir betrachten ein leeres Array A der Größe 9, d.h. es gibt die Speicherzellen $A[0], A[1], \ldots, A[8]$; in diesem führen wir offenes Hashing mit der folgenden Hashfunktion durch:

$$t(i, x) = (2x + i^2) \bmod 9$$

Dabei ist x ein einzusetzender Schlüssel und i die Nummer des Versuches, x in eine unbesetzte Speicherzelle des Arrays zu schreiben (beginnend bei $i = 0$).
Berechne zu jedem der folgenden Schlüssel die Position, die er in A bekommt:

$$5, 23, 20, 18, 7$$

(Hinweis: Die Schlüssel sollen in der gegebenen Reihenfolge eingefügt werden und der Rechenweg sollte klar erkennbar sein.)

Trage die Elemente in folgendes Array ein:

0	18
1	5
2	23
3	
4	20
5	7
6	
7	27
8	

Insert(5): t(0,5) = 10 mod 9 = 1 frei
Insert(23): t(0,23) = 46 mod 9 = 1 Kollision
t(1,23) = 47 mod 9 = 2 frei
Insert(20): t(0,20) = 40 mod 9 = 4 frei
Insert(18): t(0,18) = 36 mod 9 = 0 frei
Insert(7): t(0,7) = 14 mod 9 = 5 frei

---

z.B. noch
Insert(27): t(0,27) = 54 mod 9 = 0 Kollision
t(1,27) = 55 mod 9 = 1 Kollision
t(2,27) = 58 mod 9 = 4 Kollision
t(3,27) = 63 mod 9 = 0 Kollision
t(4,27) = 70 mod 9 = 7 frei

III. vollständige Induktion

Idee: Zeige etwas für $\boxed{A(n_0)}$ (Aussage $A(n)$) (i)

dann zeige:
Aus $A(n)$ folgt $A(n+1)$ (ii)

$$\boxed{A(n)} \longrightarrow \boxed{A(n+1)}$$

also: nehme an Aussage gilt für n, folgere, dass sie auch für n+1 gilt.

Denn dann:

$$\boxed{A(n_0)} \xrightarrow{(ii)} \boxed{A(n_0+1)} \xrightarrow{(ii)} \boxed{A(n_0+2)} \longrightarrow \boxed{A(n_0+3)} \dots$$

✓ wg. (i)

usw. (für alle $n \geq n_0$)

Formal: Wir wollen zeigen: $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}: A(n)}$

(i) Induktionsanfang: beweise $A(n)$ für $n = n_0$

(ii) Induktionsschritt: beweise $\underbrace{A(n)}_{\text{Induktionsvoraussetzung}} \Rightarrow A(n+1)$

Beispiel 1: Zeige für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$$

IA: $n=1$: $\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{2} = \frac{n}{n+1}$ ✓

IV: Aussage gilt für n, also: $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$

IS: $n \rightsquigarrow n+1$: also, z.z.: $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n+1}{n+2}$

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

$$\overset{IV}{=} \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{n+1}{n+2} \qquad \square$$

Beispiel 2: Fibonacci-Zahlen

$$F_n = \begin{cases} 1 & \text{falls } n = 1,2 \\ F_{n-1} + F_{n-2} & \text{falls } n \geq 3 \end{cases}$$

z.z.: $\forall n: \sum_{k=0}^{n} F_{2k+1} = F_{2n+2}$

IA: $n=0$: $\sum_{k=0}^{0} F_{2k+1} = F_1 = 1$

$F_{2n+2} = F_2 = 1$ ✓

IV: Aussage gelte für n: $\sum_{k=0}^{n} F_{2k+1} = F_{2n+2}$

IS: $n \rightsquigarrow n+1$ z.z. ist also $\sum_{k=0}^{n+1} F_{2k+1} = F_{2(n+1)+2} = F_{2n+4}$

$$\sum_{k=0}^{n+1} F_{2k+1} = \sum_{k=0}^{n} F_{2k+1} + F_{2(n+1)+1}$$

$$\overset{IV}{=} F_{2n+2} + F_{2n+3}$$

$$\overset{\text{Def. } F}{=} F_{2n+4}$$ ✓

$\square$