GÜ 3.2.2011 (I)

Themen:

I. Sortieren (Quicksort)
II. Mastertheorems
III. O-Notation

I. Sortieren

A   8   7   3   6
$A[1]$ $A[2]$ $A[3]$ $A[4]$

Quicksort$(A, 1, 4)$

$q \leftarrow$ Partition$(A, 1, 4)$
$x = A[4] = 6$
$i = 1$
$j = 1$ /
$j = 2$ /
$j = 3$: tausche $A[1] \leftrightarrow A[3] \longrightarrow$ 3 7 8 6
$\longrightarrow i = 2$

(Zeile 9) tausche $A[2] \leftrightarrow A[4] \longrightarrow$ 3 6 8 7

(Zeile 10) ~~Quick~~ $q = 2$

Quicksort$(A, 1, 1)$
↳ IF-Bedingung nicht erfüllt $(1 \not< 1)$

Quicksort$(A, 3, 4)$

$q \leftarrow$ Partition$(A, 3, 4)$
$x = \cancel{6}\, 7$
$i = 3$
$j = 3$ / (Schleife zu Ende)

(Zeile 9) tausche $A[3]$ mit $A[4] \longrightarrow$ 3 6 7 8

~~q=3~~ $q = 3$

Quicksort(A,p,r):

if $(p < r)$ **then**
    $q \leftarrow Partition(A, p, r)$
    $Quicksort(A, p, q - 1)$
    $Quicksort(A, q + 1, r)$
end

Partition(A,p,r):

$x \leftarrow A[r]$
$i \leftarrow p$
for $(j \leftarrow p$ **to** $r - 1)$ **do**
    if $(A[j] \leq x)$ **then**
        tausche $A[i] \leftrightarrow A[j]$
        $i \leftarrow i + 1$
    end
end
tausche $A[i] \leftrightarrow A[r]$
return i

Quicksort (A,3,2) → IF-Bed. nicht erfüllt
Quicksort (A,4,4) → ——— // ———

Weiteres Beispiel:

A = | 5 | 3 | 10 | 8 |

Quicksort (A,1,4)

q ← Partition (A,1,4) = 3

i=1

j=1: tausche A[1] ↔ A[1] /

↳ i=2

j=2: tausche A[2] ↔ A[2] /

↳ i=3

j=3: /

tausche A[3] ↔ A[4]

q=3

⇝ A = | 5 | 3 | 8 | 10 |

Quicksort (A,1,2)

q ← Partition (A,1,2)

i=1 x=A[2]=3

j=1: -

tausche A[1] ↔ A[2]

q=1

⇝ A = | 3 | 5 | 8 | 10 |

Quicksort (A,1,0) ⇝ nix
Quicksort (A,2,2) ⇝ nix

Quicksort (A,4,4) ⇝ nix

Master-Theorem:

Sei $T: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit

$$T(n) = \sum_{i=1}^{m} T(\alpha_i \cdot n) + \Theta(n^k)$$

wobei $\alpha_i \in \mathbb{R}: 0 < \alpha_i < 1$, $m \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$

Dann gilt:

$$T(n) \in \begin{cases} \Theta(n^k) & \text{für } \sum_{i=1}^{m} \alpha_i^k < 1 \\ \Theta(n^k \log n) & \text{für } \sum_{i=1}^{m} \alpha_i^k = 1 \\ \Theta(n^c) & \text{für } \sum_{i=1}^{m} \alpha_i^k > 1 \\ & \quad \text{mit } \sum_{i=1}^{m} \alpha_i^c = 1 \end{cases}$$

Aufgabe 4 von Blatt 5

IV

a) $T(n) = 256\,T\left(\frac{n}{4}\right) + n^3$

$= \cancel{256} \sum_{i=1}^{256} T\left(\frac{1}{4}\cdot n\right) + \Theta(n^3)$

Also: $\alpha_i = \frac{1}{4}$, $i = 1, \dots, 256$

$m = 256$

$k = 3$

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i^{k} = \sum_{i=1}^{256} \left(\frac{1}{4}\right)^3 = 256 \cdot \frac{1}{64} > 1$$

↳ 3. Fall, wir suchen also c mit $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i^{c} = 1$

$$\sum_{i=1}^{256} \left(\frac{1}{4}\right)^c = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad 256 \left(\frac{1}{4}\right)^c = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\frac{1}{4}\right)^c = \frac{1}{256}$$

$$\Leftrightarrow \quad 4^c = 256$$

$$\Leftrightarrow \quad c = \log_4 256$$

$$\Leftrightarrow \quad c = 4$$

$$\Rightarrow \quad T(n) \in \Theta(n^c) = \Theta(n^4)$$

(V)

b) $T(n) = 27 \cdot T\left(\frac{n}{3}\right) + n^3$

$\alpha_i = 27, \quad i = 1, -, 27$

$m = 27$

$k = 3$

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i^{k} = \sum_{i=1}^{27} \left(\frac{1}{3}\right)^3 = 27 \cdot \frac{1}{27} = 1 \quad \to \text{Fall 2}$$

$$\Rightarrow T(n) \in \Theta(n^k \log n) = \Theta(n^3 \log n)$$

c) $T(n) = 3\, T\left(\frac{n}{4}\right) + n^2$

$\alpha_i = \frac{1}{4}, \quad i = 1, -, 3$

$m = 3$

$k = 2$

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i^{k} = \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{1}{4}\right)^2 = 3 \cdot \frac{1}{16} < 1 \quad \to \text{Fall 1}$$

$$\Rightarrow T(n) \in \Theta(n^k) = \Theta(n^2)$$

III O-Notation:

$$f \in O(g(n)) \Leftrightarrow \exists\, c > 0,\ n_0 \in \mathbb{N}:\ 0 \le f(n) \le c\, g(n) \quad \forall n \ge n_0$$

$$f \in \Omega(g(n)) \Leftrightarrow \exists\, c > 0,\ n_0 \in \mathbb{N}:\ 0 \le c \cdot g(n) \le f(n) \quad \forall n \ge n_0$$

$$f \in \Theta(g(n)) \Leftrightarrow \exists\, c_1, c_2 > 0,\ n_0 \in \mathbb{N}:\ 0 \le c_1 \cdot g(n) \le f(n) \le c_2 \cdot g(n) \quad \forall n \ge n_0$$

$\rightarrow$ Folien.

__Beispiel 1:__ $f(n) = 40n + 100$
$g(n) = n^2 + 10n + 300$

$$\underbrace{40n + 100 \le n^2 + 10n + 300}_{\text{für } n \ge 20} \quad \Rightarrow \text{für } n_0 = 20,\ c = 1:\ f(n) \le c \cdot g(n)$$

für $n \ge 20$ $(40 \cdot 20 + 100 = 900,\ 20^2 + 10 \cdot 20 + 300 = 900)$

Oder auch:

$$40n + 100 \underset{n \ge 1}{\le} 40n + \overset{1200}{\cancel{400}\ \cancel{400}} \underset{n \ge 1}{\le} 4n^2 + 40n + 1200 = 4(n^2 + 10n + 300)$$

$$\Rightarrow \text{für } n_0 = 1,\ c = 4:\ f(n) \le c \cdot g(n)$$

21

3.Aufgabe: **Komplexität** **3+3+3+3 Punkte**

Seien $f, g, h : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}$ drei Funktionen. Sei $f \in \Omega(g)$ und $g \in \Theta(h)$.

a) Zeige oder widerlege: $f \in O(h)$

widerlege:

$f(n) = n^2$

$g(n) = n$

$h(n) = n$

$n^2 \nleq c \cdot n$ für Konstante c

b) Zeige oder widerlege: $f \in \Theta(h)$

Siehe a) $(f \notin O(h)!)$

c) Zeige oder widerlege: $f \in \Omega(h)$

Es gilt: $c_1 \cdot h(n) \leq g(n) \quad \forall n \geq n_1$

$c_2 \cdot g(n) \leq f(n) \quad \forall n \geq n_2$

Damit:

$c_1 \cdot c_2 \cdot h(n) \leq c_2 \cdot g(n) \leq f(n) \quad \forall n \geq \max\{n_1, n_2\}$

Setze $c = c_1 \cdot c_2$, $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$

Dann gilt:

$c \cdot h(n) \leq f(n) \quad \forall n \geq n_0$

d) Zeige: $3n^7 - 4n^3 - 10 \in \Omega(n^6)$. Gib dazu explizit geeignete Konstanten c und n_0 aus der Definition an und zeige, dass sie die Definition erfüllen.

$3n^7 - 4n^3 - 10 \in \Omega(n^6)$?

Es gilt:

$$3n^7 - 4n^3 - 10 \underset{\substack{n^4 \geq 4 \\ \text{d.h. } n \geq 2}}{\geq} 3n^7 - n^7 - 10 \underset{\substack{n^7 \geq 10 \\ \text{d.h. } n \geq 2}}{\geq} 3n^7 - n^7 - n^7 = n^7 \underset{n \geq 1}{\geq} n^6$$

$\Rightarrow$ Für $n_0 = 2$, $c = 1$ gilt:

$3n^7 - 4n^3 - 10 \geq n^6$