

Mathematische Methoden der Algorithmik
Übung 5 vom 20.01.2010

Schriftliche Abgabe bis zum 03.02.2010, 15.00 Uhr, in den Schrank vor der Abteilung
Algorithmik.

Aufgabe 1 (Komplementärer Schlupf):

Gegeben sei das folgende lineare Programm (P):

$$\begin{array}{ll} \max & 7x_1 + 6x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 \\ \text{unter} & x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 2x_5 \leq 4 \\ & 4x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 \leq 3 \\ & 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 - 2x_4 + 5x_5 \leq 5 \\ & 3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 - 2x_5 \leq 1 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \geq 0 \end{array}$$

- (a) Formuliere das duale Problem zu (P).
- (b) Formuliere die Bedingungen für komplementären Schlupf zu (P).
- (c) Prüfe mit Hilfe des Satzes vom komplementären Schlupf, ob $x^* = (0, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{3}, 0)^T$ eine optimale Lösung von (P) ist. (Hinweis: Auch wenn man y nicht kennt, kann man Bedingungen herleiten, die ein y erfüllen muss, und dann konkrete Dinge berechnen.)

(5+5+10 Punkte)

Aufgabe 2 (Traveling-Salesman-Problem):

Zwischen je zwei dieser Städte gibt es eine direkte Straßenverbindung. Die Werte (auf Vielfache von 10 Kilometern gerundet) sind die folgenden:

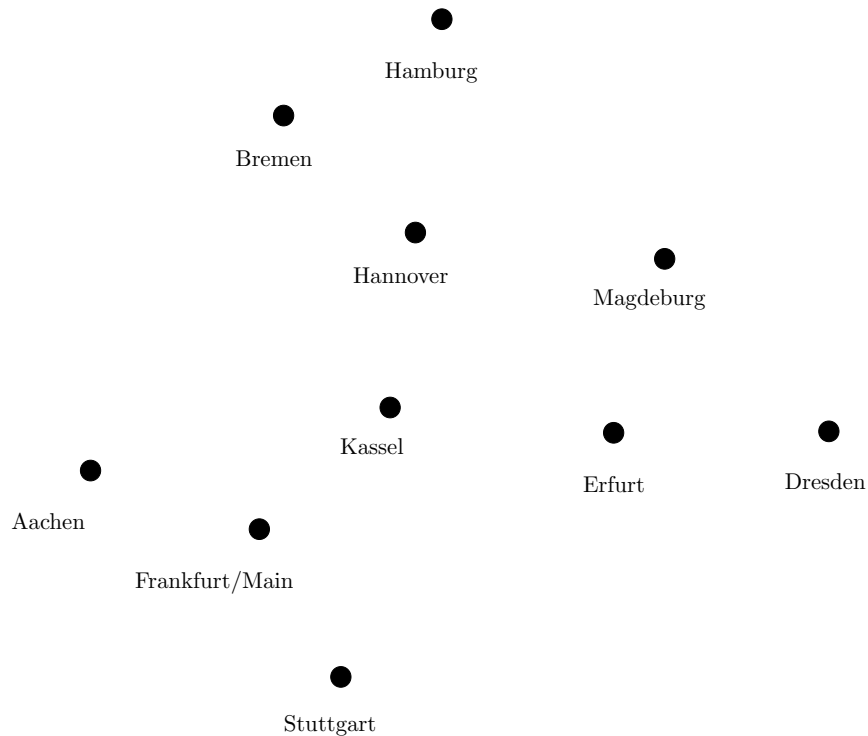


Abbildung 1: Zehn Städte in Deutschland

		2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	Aachen	37	65	45	24	48	35	31	50	41
2	Bremen		48	35	45	11	12	28	25	65
3	Dresden			22	49	49	39	40	23	53
4	Erfurt				27	38	29	14	21	44
5	Frankfurt/Main					51	36	19	45	20
6	Hamburg						15	31	27	66
7	Hannover							24	14	53
8	Kassel								25	36
9	Magdeburg									57
10	Stuttgart									

Wir betrachten obige Instanz des Traveling Salesman Problem (TSP).

Erzeuge eine LP-Datei, die das LP (ohne Subtour-Elimination-Constraints) zur obigen Instanz des TSP Problems enthält und löse es mit CPLEX. Danach ergeben sich drei sinnvolle Möglichkeiten, um eine Subtour-Elimination-Constraint einzufügen (Welche?). Füge diese jeweils einzeln hinzu und löse das modifizierte LP erneut. Welche Lösungen ergeben sich? (Zeichnung!)

Füge nun hinreichend viele Subtour-Elimination-Constraints ein, um einen zusammenhängenden Trägergraphen zu bekommen. Findest Du damit eine Optimallösung, die eine Rundreise beschreibt? Gib eine optimale Rundreise an.

((15 * (Wert Deiner Lösung)/Optimalwert) Punkte)

Aufgabe 3 (Modellierung):

Modelliere die folgenden Probleme jeweils als IP. Beschreibe dabei jede Restriktion kurz mit eigenen Worten.

- a) Gegeben sei ein Behälter der Größe W sowie n Objekte mit Größen w_i und Profiten p_i , $i = 1, \dots, n$. Ziel ist es, den Behälter so zu befüllen, dass der Profit maximal ist.
- b) Gegeben seien unendlich viele Behälter der Größe 1 sowie n Objekte mit Größen w_i , $i = 1, \dots, n$. Ziel ist es, alle Objekte in möglichst wenige Behälter zu packen.

(Hinweis: Eine Menge von Objekten kann in einen Behälter gepackt werden, wenn die Summe der Größen kleiner als die Behältergröße ist.)

- c) Gegeben seien m (identische) Maschinen und n Jobs, wobei der i -te Job $p_i \in \mathbb{N}$ Zeiteinheiten ($i = 1, \dots, n$) auf einer Maschine bearbeitet werden muss. Für jeden Job gibt es außerdem eine *release time*, d.h. einen Zeitpunkt zu dem der Job frühestens gestartet werden darf. Ziel ist es, die Zeit zu minimieren, bis der letzte Job bearbeitet ist.

(Hinweis: Ein Job darf nur auf einer Maschine bearbeitet werden und seine Bearbeitung darf nicht unterbrochen werden. Eine Maschine darf natürlich (nacheinander) mehrere Jobs bearbeiten.)

(8+8+9 Punkte)