

Mathematische Methoden der Algorithmik Übung 3 vom 02.12.2009

Schriftliche Abgabe bis zum 06.01.2010, 15.00 Uhr, in den Schrank vor der Abteilung
Algorithmik.

Aufgabe 1 (Dualität):

Gegeben sei das folgende lineare Programm

$$\begin{array}{rcl} \max & c^T x & + & d^T y \\ & Ax & + & By & \leq & a \\ & Cx & + & Dy & = & b \\ & x & & & \geq & 0. \end{array}$$

Leite das duale Problem her, indem Du das lineare Programm zunächst auf Standardform bringst und dann dualisierst. Danach kann man dann noch Ungleichungen zusammenfassen.
(30 Punkte)

Aufgabe 2 (Umformung linearer Programme):

Gegeben ist das lineare Programm

$$\begin{array}{rcl} \max & c^T x & + & d^T y \\ & Ax & & & \geq & a \\ & & & By & = & b \\ & x & & & \geq & 0. \end{array}$$

Reduziere dieses Problem auf eines der folgenden einfacheren Form:

$$\begin{array}{rcl} \min & g^T z \\ & Fz & \leq & f \\ & z & \geq & 0, \end{array}$$

Das heißt also, bringe das erste Problem in die Form des zweiten, indem g , F , f und z in Abhängigkeit von den Daten des ersten Problems beschrieben werden, so dass jede zulässige

Lösung des einen Problems einer zulässigen Lösung des anderen Problems entspricht; insbesondere sollen die Optimalwerte einander entsprechen, falls es zulässige Lösungen gibt.
(20 Punkte)

Aufgabe 3 (Basiswechsel):

Gegeben sei das folgende lineare Programm:

$$\begin{array}{rll} \max & 7x_1 + 6x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 & \\ \text{unter} & x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 2x_5 \leq 4 & \\ & 4x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 \leq 5 & \\ & 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 - 2x_4 + 5x_5 \leq 5 & \\ & x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 - 2x_5 \leq 1 & \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \geq 0 & \end{array}$$

- (a) Bringe das Problem auf Standardform. (Damit erhält Du sofort eine zulässige Basis.)
Wir bezeichnen die Spalten der Matrix A mit a_i , $i = 1, \dots, 9$.
- (b) Wir betrachten das Problem in Standardform. Tausche nun nacheinander die Vektoren a_1, a_2 und a_3 in die Basis, so dass diese immer zulässig bleibt; gehe dabei jeweils von dem Problem in Standardform aus. Gib den Zielfunktionswert nach jedem Tausch an. Welcher Tausch ist unter diesem Aspekt sinnvoll, welcher nicht?
(10+20 Punkte)

Aufgabe 4 (Lösungsmengen linearer Optimierungsprobleme):

- (a) Für welche Werte $s, t \in \mathbb{R}$ haben die folgenden Probleme keine Lösung, für welche eine optimale Lösung, und für welche sind sie unbeschränkt?

$$\begin{array}{rll} \max & x_1 + x_2 & \\ & sx_1 + tx_2 \leq 1 & \\ & x_1, x_2 \geq 0, & \end{array}$$

und

$$\begin{array}{rll} \max & x_1 + x_2 & \\ & sx_1 + tx_2 \geq 1 & \\ & x_1, x_2 \geq 0, & \end{array}$$

- (b) Konstruiere ein lineares Optimierungsproblem mit zwei Restriktionen und einer degenerierten Basislösung. Erläutere Deine Konstruktion anhand einer Zeichnung.
(10+10 Punkte)

Aufgabe 5 (Weihnachtsaufgabe — Santa Claus und das Snow Blower-Problem):

„Hmmm, hmmm, hmmm“, brummte Santa Claus in seinen Bart. Hätte er bloß nie auf diese Unternehmensberater gehört. „Ein Fahrzeug mit Kufen benutzt heutzutage niemand mehr, der Verschleiß ist einfach zu groß. Und außerdem, Schnee ist sowieso nur ein temporäres Phänomen, in 20 Jahren redet niemand mehr davon. Tja, Mr. Claus, da gibt es ordentliches Einsparpotential und im Bezug auf die Geschwindigkeit ist beim Wechsel von Kufen auf Reifen auch noch einiges rauszuholen!“, hatten sie ihm vorgerechnet. Danach waren noch jede Menge Einzelheiten dargestellt worden, die er aber nicht so richtig verstanden hatte. Nach den Regeln der Physik hätte er wohl schon in den Vorjahren einfach verglühen müssen... Letztendlich hatte er sich dann für vier neue Winterreifen (mit besonders hohem Schmelzpunkt) für seinen Schlitten entschieden.

Aber im Moment brauchte er sich über Höchstgeschwindigkeiten gar keine Gedanken zu machen; er kam noch nicht einmal mit seinem Schlitten aus der Garage. In der Nacht hatte es einen Meter Schnee gegeben. Mit Kufen wäre das kein Problem gewesen, aber mit Rädern – keine Chance. Da fiel ihm ein, dass er irgendwo auf seinem Schlitten eine Schneefräse (Snow-Blower hatte auf dem Wunschzettel gestanden) für jemanden in New York haben müsste. Der wollte damit einige Experimente machen. „Wie auch immer – dieses Ding könnte imir doch helfen. Ich brauche ja auch nur meine Einfahrt zu räumen, die Straße ist frei“, murmelte er in seinen weißen Bart.

Nachdem er den Snow Blower gefunden hatte, las er sich die Gebrauchsanweisung durch und stellte fest, dass Schnee bis zu einer Höhe von maximal einem Meter beseitigt werden kann – Glück gehabt. Ausserdem konnte der Snow Blower den Schnee nur nach rechts (in Fahrtrichtung gesehen) wegräumen. Um keine Zeit zu verschenken machte er sich eine Skizze von seiner Einfahrt (Abb. 1) und wollte noch kurz die optimale Räum-Strategie bestimmen bevor es losging. Aber so einfach war das ja gar nicht, stellte er fest. „Dann nochmal in Ruhe“, dachte er, und formulierte das Problem ganz “mathematisch”:

Gegeben: Ein 3×3 -Gitter sowieso eine Garage, ein Snow Blower und eine Einheit Schnee auf jedem Gitterfeld. Der Snow-Blower kann Schnee von maximal einer Einheit um ein Feld nach rechts werfen (immer in Fahrtrichtung gesehen) und sich horizontal und vertikal von Feld zu Feld bewegen. Wenn der Schnee über den Rand des 3×3 -Gitters geworfen ist, ist er geräumt (um die Höhe des dortigen Schneeberges braucht man sich keine Gedanken zu machen). Der Snow Blower selbst darf den Bereich (3×3 -Gitter + Garage) nicht verlassen.

Gesucht: Eine optimale Strategie, die den Schnee aus dem gesamten 3×3 -Gitter entfernt (über den Rand befördert), dabei keinen Schnee in die Garage wirft und danach wieder in die Garage zurückkehrt.

Folgende Aufgaben gilt es also zu lösen:

- a) Finde eine Strategie, die möglichst wenige Schritte benötigt.
- b) Zeige, dass deine Strategie optimal ist, d.h., dass es keine Strategie gibt, die mit weniger Schritten auskommt.

(Hinweis: Um Teil b) zu beantworten ist es sinnvoll, sich einige Eigenschaften zu überlegen, die die optimale Tour erfüllen muss und damit dann eine untere Schranke für die Länge der optimalen Tour anzugeben. Insbesondere sollten nicht alle Touren enumeriert und verglichen werden.)

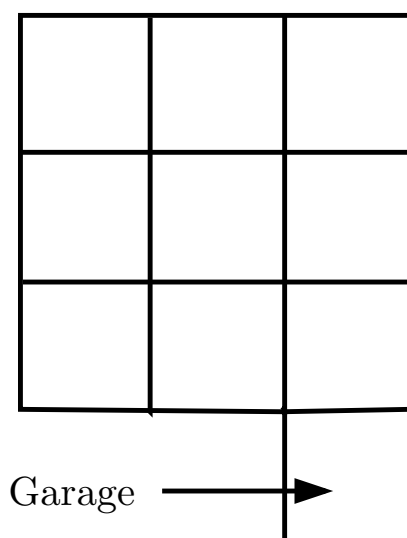


Abbildung 1: Die Einfahrt mit Garage vorm Haus des Weihnachtsmannes.

(5+15 Punkte)

Frohe Weihnachten und einen guten Rutsch ins Neue Jahr!

