Abteilung Algorithmik
Institut für Betriebssysteme und Rechnerverbund **WS 09/10**
TU Braunschweig

Prof. Dr. Sándor Fekete
Christiane Schmidt

Mathematische Methoden der Algorithmik
Übung 2 vom 18.11.2009

Schriftliche Abgabe bis zum 03.12., 15.00 Uhr, in den Schrank vor der Abteilung *Algorithmik*.

Aufgabe 1 (Dualität):

a) Das Problem min $c^T x$ unter $Ax = b$, $x \geq 0$ habe einen endlichen Optimalwert, das duale Problem habe eine zulässige Lösung. Zeige, dass das Problem min $c^T x$ unter $Ax = b'$, $x \geq 0$ für alle b' nicht unbeschränkt ist.

b) Sei $A = A^T$. Zeige, dass jede zulässige Lösung von min $c^T x$ unter $Ax = c$ optimal ist.

(7+8 Punkte)

Aufgabe 2 (LP-Formulierung eines Optimierungsproblems - SET COVER):

a) Formuliere das folgende Optimierungsproblem (MIN SET COVER) als IP:

Gegeben sei eine Menge $S = \{1, \dots, n\}$. Außerdem haben wir m Mengen $\{S_1, \dots, S_m\}$, die Teilmengen von S sind ($S_i \subseteq S$) und deren Vereinigung wieder S ergibt. Von diesen S_i möchten wir nun möglichst wenige auswählen, dabei aber sicherstellen, dass jedes Element aus S in mindestens einer der ausgewählten Mengen S_i enthalten ist. Formal heißt das:

Gegeben sei eine Menge $S = \{1, \dots, n\}$; $F = \{S_1, \dots, S_m\}$ mit $S_i \subseteq S$ sei eine Menge von Teilmengen von S. Für F gelte: $\bigcup_{S_i \in F} S_i = S$.

Wir suchen eine Teilmenge $F' \subseteq F$ mit $\bigcup_{S_i \in F'} S_i = S$ so, dass $|F'|$ minimal ist.

b) Wie sieht das zugehörige LP aus, das man durch Relaxierung erhält?

(Tipp: Es wird wieder etwas ausgewählt, vergleiche zum Beispiel die Auswahl von Kanten beim Matching. Außerdem: betrachte genau was wir erreichen wollen - alle Elemente von S sollen in einer der Teilmengen enthalten sein!)

(13+2 Punkte)

Aufgabe 3 (LP grafisch):

Betrachte folgendes lineares Optimierungsproblem:

$$\begin{array}{rrcrcr}
\max & x_1 & + & 2x_2 & & \\
\text{unter} & x_1 & + & x_2 & \leq & 16 \\
 & 2x_1 & + & x_2 & \leq & 34 \\
 & x_1 & & & \leq & 10 \\
 & & & x_2 & \leq & 10 \\
 & x_1, & & x_2 & \geq & 0
\end{array}$$

a) Zeichne die Menge aller zulässigen Lösungen.

b) Zeichne die zulässigen Lösungen ein, für den Fall, dass wir die letzte Zeile ersetzen durch $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$.

c) Schreibe das (urspünglich gegebene) Problem in Standardform (Minimiere, Gleichheitsrestriktionen, vorzeichenbeschränkte Variablen).

d) Bestimme (algebraisch) alle Basislösungen. Welche davon sind zulässig?

e) Zeichne die Projektionen der Basislösungen (des Problems aus c)) in das zweidimensionale Bild der zulässigen Lösungen. Markiere die zulässigen Basislösungen.

f) Gibt es degenerierte Basislösungen?

(4+2+8+10+4+2 Punkte)