Abteilung Algorithmik
Institut für Betriebssysteme und Rechnerverbund **WS 09/10**
TU Braunschweig

Prof. Dr. Sándor Fekete
Nils Schweer

Algorithmen und Datenstrukturen
Übung 5 vom 13.01.2010

Abgabe der Lösungen am Mittwoch, den 27.01.10, vor der Abteilung *Algorithmik*.
Bitte die Blätter vorne deutlich mit eigenem **Namen** und **Gruppennummer** versehen!

Aufgabe 1 (Klausurvorbereitung):
Gib Deinen Namen (Format: Nachname, Vorname), Matrikelnummer und Studiengang (mit Zusatz Bachelor, Master, Diplom!) *leserlich* an.
Diese Angaben brauchen wir für die Weiterleitung der Klausurergebnisse, also gebt euch Mühe ;-).

(2 Punkte)

Aufgabe 2 (AVL-Bäume):

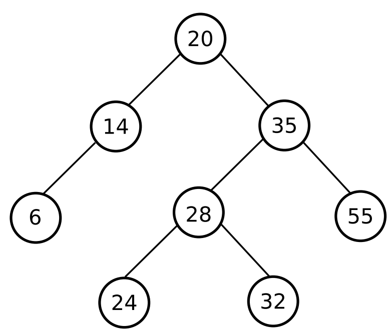

Abbildung 1: Der AVL-Baum T.

In den nachfolgenden Teilaufaufgaben sollen verschiedene Operationen auf den AVL-Baum T (vgl. Abbildung 1) angewendet werden. Dabei soll jede Teilaufgabe mit T starten. Die Operationen sollen so ausgeführt werden, dass der geänderte Baum wieder ein AVL-Baum ist. Gib den AVL-Baum nach jeder Teilaufgabe an.

a) Insert(23);

b) Insert(31);

c) Delete(24); Delete(32), Insert(50); Insert(60); Insert(52);

d) Delete(24); Delete(32), Insert(50); Insert(60); Insert(56); (5+5+5+5 Punkte)

Aufgabe 3 (Fibonacci-Zahlen und Goldener Schnitt):

Im Jahre 1202 beschrieb Leonardo von Pisa (genannt Fibonacci, Sohn des Bonacci) in seinem Buch *Liber Abaci* das Wachstum einer Population von Kaninchen. Ein neugeborenes Paar Kaninchen braucht zwei Monate, um eigenen Nachwuchs zu produzieren. Wenn man also im ersten Monat mit einem Paar startet, dann ergibt sich die Rekursionsbeziehung

$$F_n = \begin{cases} 1 & \text{falls } n = 1, 2, \\ F_{n-1} + F_{n-2} & \text{falls } n \geq 3. \end{cases}$$

(a) Gib die ersten 15 Fibonacci-Zahlen an; bestimme jeweils $\frac{F_n}{F_{n-1}}$.

(b) Zeige durch Induktion:

$$F_n = \frac{(1+\sqrt{5}\,)^n - (1-\sqrt{5}\,)^n}{2^n\sqrt{5}}.$$

(c) Der sogenannte *Goldene Schnitt* ϕ ergibt sich daraus, dass man eine Strecke der Länge c so in zwei Teile $a \leq b$ teilt, dass $b/a = c/b = \phi$ gilt. Der Goldene Schnitt spielt in vielen Bereichen von Kunst und Ästhetik eine Rolle, hat aber auch seinen Platz in der Mathematik.

Zeige: ϕ erfüllt die Gleichung $\phi(\phi - 1) = 1$; bestimme die Lösung $\phi > 1$.

(2+8+8 Punkte)

Aufgabe 4 (Mergesort):

Sortiere die Sequenz $(10, 9, 23, 15, 8, 7, 7, 2)$ mit Hilfe von Mergesort. Gib die Zwischenschritte in geeigneter Form an. (Hinweis: Mergesort wird in der 3. Kalenderwoche in der Vorlesung besprochen.)

(20 Punkte)

Aufgabe 5 (Mastertheorem):

Diese Aufgabe wird nicht bewertet, ihr Bearbeitung wird dennoch empfohlen!

a) Bestimme mit Hilfe des Mastertheorems das asymptotische Wachstum der Rekursion $T(n) = 256 \cdot T(\frac{n}{4}) + n^3$.

b) Bestimme mit Hilfe des Mastertheorems das asymptotische Wachstum der Rekursion $T(n) = 27 \cdot T(\frac{n}{3}) + n^3$.

c) Bestimme mit Hilfe des Mastertheorems das asymptotische Wachstum der Rekursion $T(n) = 3 \cdot T(\frac{n}{4}) + n^2$.