

Prof. Dr. Sándor Fekete  
Nils Schweer

## Algorithmen und Datenstrukturen Übung 1 vom 04.11.2009

Abgabe der Lösungen am Mittwoch, den 18.11.09, vor der Abteilung *Algorithmik*.  
Bitte die Blätter vorne deutlich mit eigenem Namen und Gruppennummer versehen!

### Aufgabe 1 (Das Sieb des Eratosthenes):

Das *Sieb des Eratosthenes* ist ein Verfahren zur Bestimmung von Primzahlen. Die Vorgehensweise ist folgendermaßen:

- (1) Betrachte die Liste aller positiven ganzen Zahlen ab 2.
  - (2) Setze einen Zeiger auf die Zahl 2.
  - (3) Lösche alle echten Vielfachen der Zahl, auf die der Zeiger steht.
  - (4) Setze den Zeiger auf die nächste ungelöschte Zahl in der Liste.
  - (5) Fahre bei (3) fort.
- a) Zeige: Eine Primzahl wird nicht gelöscht.
  - b) Zeige: Jede zusammengesetzte Zahl wird irgendwann gelöscht.
  - c) Hat das Verfahren die Eigenschaften, die Donald Knuth an einen Algorithmus stellt?  
(Antwort mit Begründung!)
  - d) Modifiziere das Verfahren, so dass ein Algorithmus entsteht, der überprüft, ob eine gegebene positive ganze Zahl  $z \geq 2$  eine Primzahl ist.
  - e) Prüfe mit Deinem Verfahren aus d), ob 257 eine Primzahl ist.

(4+4+2+8+2 Punkte)

**Bitte wenden!**

**Aufgabe 2 (Eulerweg):**

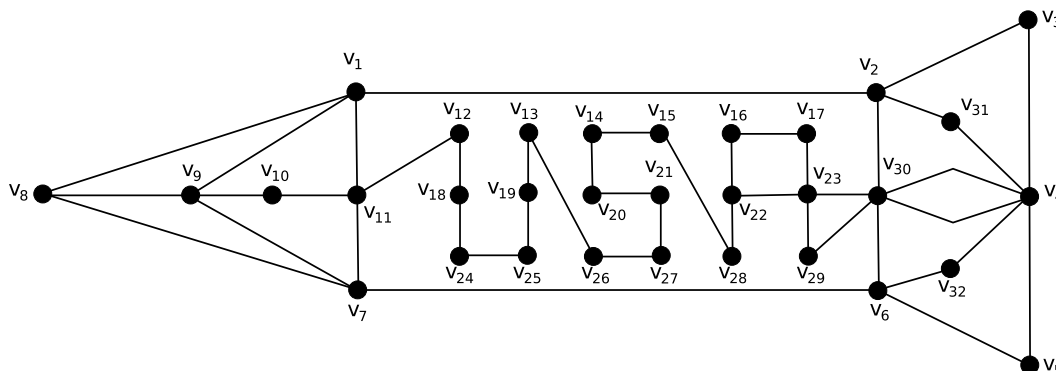


Abbildung 1: Euler auf dem Weg in den Weltraum!

Finde im Graphen in Abbildung 1 einen Eulerweg oder zeige, dass es keinen gibt.

(15 Punkte)

**Aufgabe 3 (Graphen):**

Wie in der Vorlesung beschrieben enthält jede Kante eines einfachen Graphen zwei Knoten. Darauf aufbauend bezeichnet man als *Grad eines Knotens*  $v$  die Anzahl der Kanten, die  $v$  enthalten. Der Grad eines Knotens  $v$  (englisch “degree”) wird mit  $\delta(v)$  abgekürzt. Ein Graph heißt *vollständig*, wenn es zwischen je zwei Knoten eine Kante gibt, d. h. alle möglichen Verbindungen auch vorhanden sind.

- Zeichne einen beliebigen Graphen mit  $n \geq 5$  Knoten  $v_1, \dots, v_n$  und  $m \geq 10$  Kanten  $e_1, \dots, e_m$ . Überprüfe, ob  $\sum_{i=1}^n \delta(v_i)$  eine gerade Zahl ist.
- Beweise, dass  $\sum_{i=1}^n \delta(v_i)$  für *jeden* Graphen  $G$  mit  $n$  Knoten eine gerade Zahl ist.
- Zeichne einen beliebigen Graphen mit  $n \geq 5$  Knoten  $v_1, \dots, v_n$  und  $m \geq 10$  Kanten  $e_1, \dots, e_m$ . Überprüfe, ob  $\sum_{i=1}^n \delta(v_i) = 2m$  gilt.
- Beweise, dass  $\sum_{i=1}^n \delta(v_i) = 2m$  für *jeden* Graphen  $G$  mit  $n$  Knoten und  $m$  Kanten gilt.
- Sei  $H$  ein vollständiger Graph mit  $n$  Knoten. Zeige, dass für  $H$  die Zahl der Kanten genau  $\frac{n}{2}(n - 1)$  beträgt.

(2+7+2+7+7 Punkte)