3. Suche in Graphen

3.1 Wege, Pfade, Bäume

Vorspann: Paul Erdös (26.3.1913 – 20.9.1996)
Produktivster Mathematiker aller Zeiten (≈ 1500 Artikel)
(„Zweitbedeutendster Mathematiker nach Euler")

Erdös-Zahl:

Erdös-Graph: Knoten ≙ Wissenschaftler
Kanten ≙ Verbindungen durch gemeinsam geschriebene Artikel

Erdös-Zahl: Kürzester Abstand zu Erdös im Erdös-Graphen, also

Erdös: EZ 0

Koautoren von Erdös (502): EZ 1 (z.B. Ron Graham)

Koautoren von Koautoren von Erdös, aber nicht Koautoren (8162): EZ 2 (z.B. Sándor Fekete)

usw.!

EZ ∞ ?!

→ Datenbanken, z.B. DBLP

Kevin Bacon (*8.7.1958)

Filmschauspieler (64 Filme in IMDb)

Kevin-Bacon-Zahl:

Kevin-Bacon-Graph: Knoten $\hat{=}$ Schauspieler
Kanten $\hat{=}$ Verbindungen durch gemeinsam gedrehte Filme

Kevin-Bacon-Zahl: Kürzester Abstand zu Kevin Bacon im Kevin-Bacon-Graphen, also

Kevin Bacon: KBZ 0

Ko-Stars von K.B.: KBZ 1 (z.B. Tom Hanks)

Ko-Ko-Stars von KB.: KBZ 2 (z.B. Elvis)

usw.!

KBZ ∞ ?!

→ Datenbanken, z.B. IMDb

→ Soziale Netzwerke!
("6 degrees of separation")

Also:
- Graphen können groß sein
- Graphen können unübersichtlich sein
- Verbindungen in Graphen sind vielfältig, interessant, wichtig!

Problem 3.1 (s-t-Weg)

Gegeben: Graph $G=(V,E)$, Startknoten s, Zielknoten t

Gesucht: Weg von s nach t, falls einer existiert

Allgemeiner:

Problem 3.2 (Zusammenhangskomponente)

Gegeben: Graph $G=(V,E)$, Startknoten s

Gesucht: Menge aller von s erreichbaren Knoten (d.h. Zshgskomp. von s), Wege, die Erreichbarkeit realisieren

Beobachtung:

Satz 3.3

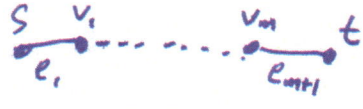
Wenn ein Weg zwischen zwei Knoten in einem Graphen existiert, dann existiert auch ein Pfad.

(Also: ... dann existiert ein Weg ohne doppelt besuchte Knoten.)

Beweis:

Sei $W = s, e_1, v_1, \dots, v_m, e_{m+1}, t$ ein Weg von s nach t.

Idee:



Eliminiere Kreise auf dem Weg!

Technische Umsetzung:

Angenommen, es gibt einen Weg; dann betrachte ~~eine~~ unter allen Wegen einen (W) mit möglichst wenigen Kanten.
Hätte dieser W einen doppelt besuchten Knoten:

$$W' = s, e_1, v_1, \dots, v_i, e_{i+1}, \dots, v_i, e_k, \dots, t$$

erster Besuch — letzter Besuch

- dann gäbe es einen noch kürzeren Weg:

$$W'' = s, e_1, v_1, \dots, v_i, e_k, \dots, t.$$

Also ist W' ein Pfad! $\square$

Konsequenz:

Korollar ~~Satz~~ 3.4 ← „Logische Folgerung"

Für Problem 3.2 gibt es ~~immer~~ als Erreichbarkeit sichernde Menge von Kanten immer eine Menge, die keinen Kreis enthält.

Verschärfung aus dem Beweis:

Korollar ~~Satz~~ 3.5

Für Problem 3.2 gibt es immer eine kreisfreie Menge von Kanten, die die kürzestmögliche Erreichbarkeit sichert.