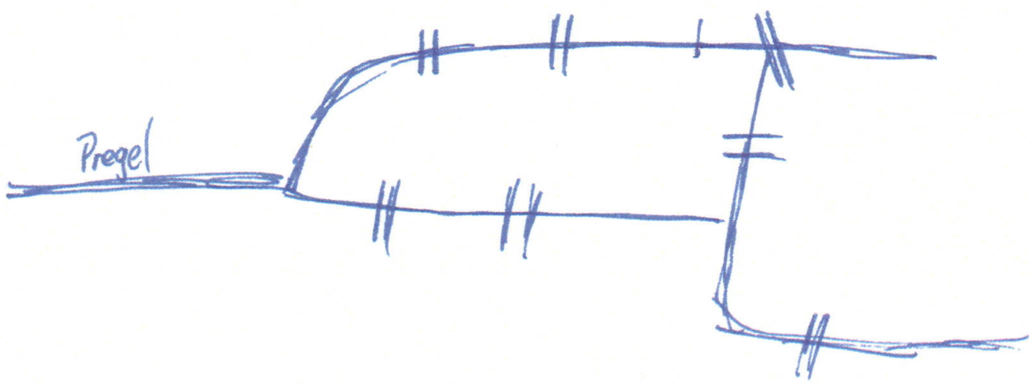
03.11.09

2 Graphen

2.1 Historie

Erste wissenschaftliche Arbeit über Graphen:

1735 in Königsberg



Gegeben: 1 Fluss, 2 Ufer, 2 Inseln, 7 Brücken

Aufgabe: „Über 7 Brücken musst du gehn..."

Genauer: Problem 2.1 (Eulerpfad)

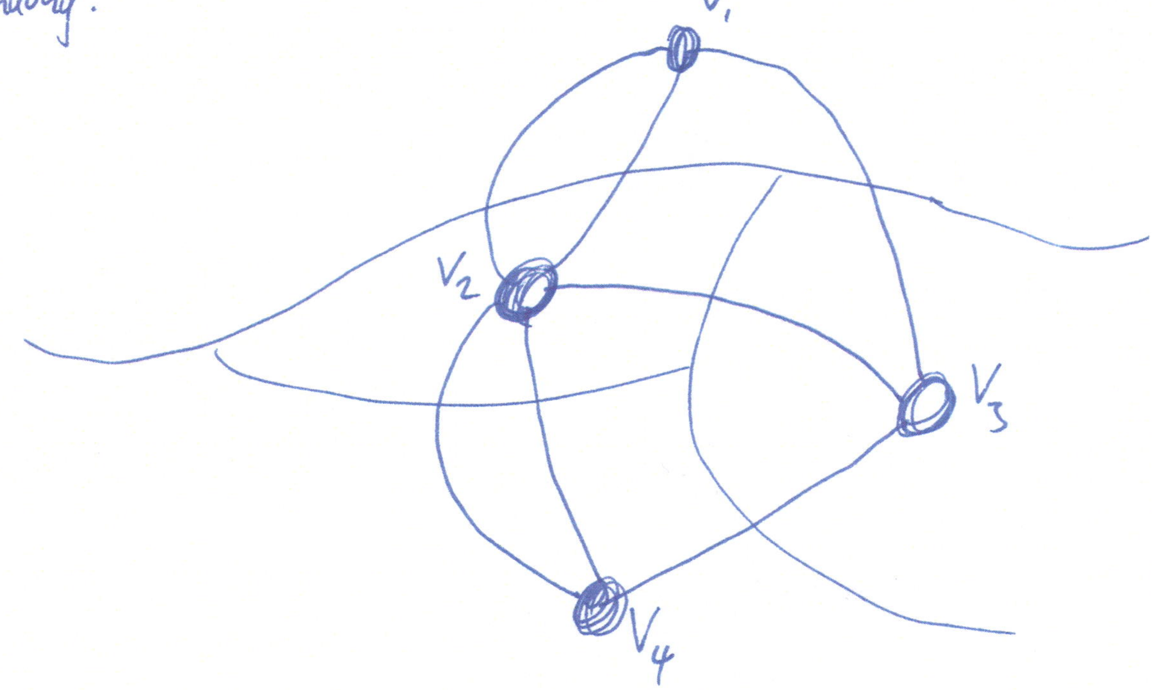
Gegeben: 7 Brücken

Gesucht: Ein Weg, der (trockenen Fußes!) alle Brücken genau einmal überquert.

(10)

Aflösung: Es gibt keinen solchen Weg!

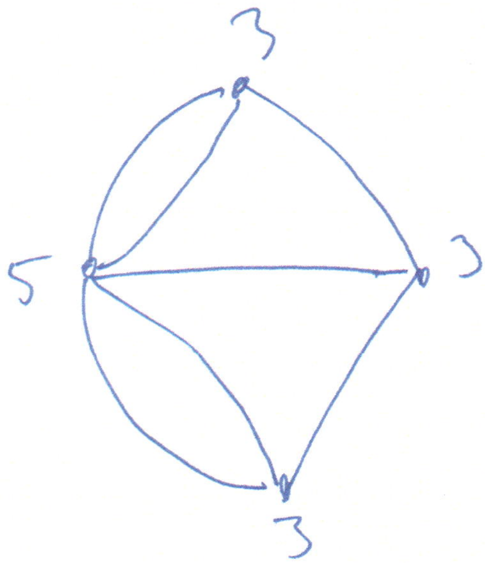
Begründung:



Bei jeder Benutzung einer Brücke wechselt man von einem Gebiet in ein anderes.

~~wenn man ein Gebiet wieder verlas~~

Wenn man einen Weg betrachtet, der in einem Gebiet v_a beginnt und in einem Gebiet v_e endet, dann gilt ~~es~~ für die anderen beiden Gebiete v_i und v_j, dass sie genauso oft betreten wie verlassen werden; also muss es ~~...~~ mindestens zwei Gebiete geben, die jeweils eine gerade Anzahl von Brücken aufweisen.



Das ist hier nicht der Fall, also gibt es keinen solchen Weg! □

Leonhard Euler (* 15.4.1707 in Basel
+ 18.9.1783 in St. Petersburg)

13 1720 Studienbeginn in Basel
16 1723 Magister
20 1727 Berufung an Petersburger Akademie
24 1731 Professor für Physik

(Heute nicht mehr möglich?

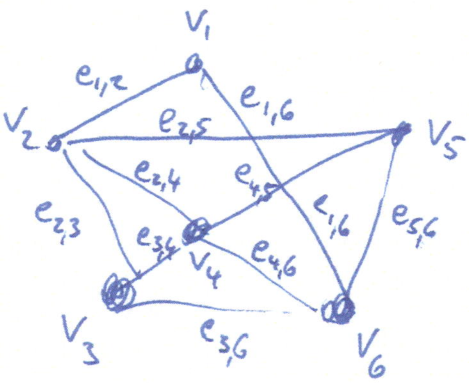
Erik Demaine * 28.2.1981 in Halifax, Kanada

12 1993 Studienbeginn in Kanada
14 1995 Bachelor
15 1996 Master
20 2001 Doktor
20 2001 Assistenzprofessor am MIT
24 2005 Professor am MIT

Arbeitsgebiet : Algorithmik)

Euler hat eine Instanz betrachtet, aber dann gleich ein Problem untersucht & – und dabei ein neues Gebiet begonnen: die Graphentheorie.

Definition 2.2 (Graphen)



Knoten: $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$

Kanten: $e_{1,2}$, $e_{1,6}$,
$e_{2,3}$, $e_{2,4}$, $e_{2,5}$
$e_{3,4}$, $e_{3,6}$
$e_{4,5}$, $e_{4,6}$
$e_{5,6}$

Bezeichnungen:

Knotenmenge V ("vertices")

Kantenmenge E ("edges")

~~(1) Ein Graph G ist~~

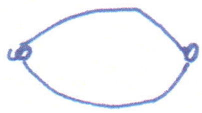
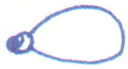
Schreibweise:

$$G = (V, E)$$

Für alle Kanten gilt: e hat zwei Elemente

Mathematisch: $\forall\, e \in E \subseteq 2^V : |e| = 2$

Unter Umständen auch möglich:

- Parallele Kanten  → Euler!
- Schleifen 

Jetzt formaler:

(1) (i) Ein ungerichteter Graph G ist ein Tripel (V, E, Ψ), für das

(a) V und E endliche Mengen sind

(b) $\Psi : E \to \{ X \subseteq V \mid 1 \leq |X| \leq 2 \}$

Kardinalität von X!

(Also: Jede Kante enthält einen oder zwei Knoten)

Schleifen

(ii) V ist die Knotenmenge

(iii) E ist die Kantenmenge

(2) (i) Zwei Kanten e und e' sind parallel, wenn $\Psi(e) = \Psi(e')$.

(ii) e ist eine Schleife, wenn $|\Psi(e)| = 1$ ist

(iii) Ein Graph ohne parallele Kanten und ohne Schleifen heißt „einfach", und man schreibt auch einfach (!) $G = (V, E)$; $E(G)$ ist die Kantenmenge von G.

(iv) In einem einfachen Graphen kann man $\{v_i, v_j\}$ für eine Kante e_{ij} zwischen v_i und v_j schreiben

(v) $|E|$ ist die Anzahl der Kanten von G.

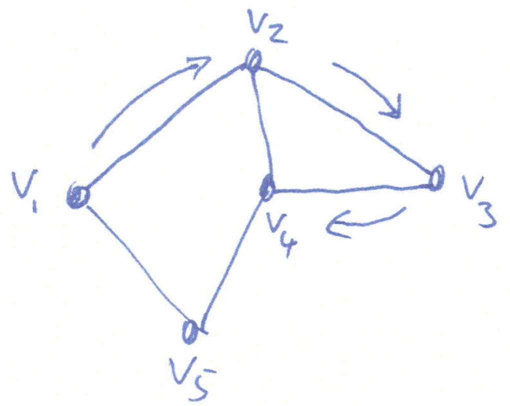
(vi) Oft verwendet man den Buchstaben:

n für $|V|$, die Anzahl der Knoten

m für $|E|$, die Anzahl der Kanten.

$\square$

Jetzt wollen wir uns Gedanken machen um die Art und Weise, wie man in einem Graphen umherwandern kann!



Laufe von v_1
nach v_2
nach v_3
nach v_4 !