MERGE(A, p, q, r)

```
n₁ ← q − p + 1
n₂ ← r − q
create arrays L[1 .. n₁ + 1] and R[1 .. n₂ + 1]
for i ← 1 to n₁
     do L[i] ← A[p + i − 1]
for j ← 1 to n₂
     do R[j] ← A[q + j]
L[n₁ + 1] ← ∞
R[n₂ + 1] ← ∞
i ← 1
j ← 1
for k ← p to r
     do if L[i] ≤ R[j]
           then A[k] ← L[i]
                i ← i + 1
           else A[k] ← R[j]
                j ← j + 1
```

Wie sieht die Laufzeit aus?

Satz 5.2:

Mergesort hat eine Laufzeit von $O(n \log n)$ (für einen n-elementigen Array A).

Beweis:

Zunächst runden wir n auf die nächste 2er-Potenz. (in O-Notation ändert sich dadurch nichts, $2^{k-1} < n \leq 2^k$, Faktor 2)
Wir erhalten in jedem Schritt also einen Subarray der Größe $\frac{n}{2}$.
$T(n)$ bezeichne die Laufzeit von Mergesort für einen n-elementigen Array A.

Divide: $O(1)$

conquer: $2 \cdot T(\frac{n}{2})$

Combine: $O(n)$

Damit erhalten wir folgende Beziehung:

$$T(n) = \begin{cases} O(1) & , \quad n = 1 \\ O(1) + 2 \cdot T(\frac{n}{2}) + O(n) = 2 \cdot T(\frac{n}{2}) + O(n) & , \text{ für } n \geq 2 \end{cases}$$

T(n) ist über eine sog. „Rekursionsgleichung" definiert (mehr im nächsten Kapitel).

Für geeignete Konstanten d, g können wir T(n) auch folgendermaßen schreiben.

$$T(n) = 2 \cdot T\left(\frac{n}{2}\right) + \underbrace{d \cdot n}_{\text{statt } O(n)}, \quad n \geq 2, \quad d \in \mathbb{R}$$

$$T(1) = O(1) = g, \quad g \in \mathbb{R}$$

Nun müssen wir zeigen, dass $T(n) \leq c \cdot n \log n$ für ein geeignetes c.

Induktions-Anfang:

$$n = 2: \quad T(2) = 2 \cdot T(1) + d \cdot 2 = 2 \cdot g + 2d = 2(g + d)$$

$$c \cdot \underbrace{n}_{2} \cdot \underbrace{\log n}_{=1} = 2 \cdot c \geq 2 \cdot (g + d)$$

wähle $c \geq g + d$. (Beachte, dieses impliziert $c \geq d$)

Induktionsvoraussetzung:

Die Behauptung gilt für $k = \frac{n}{2}$, d.h.

$$T\left(\frac{n}{2}\right) \leq c \cdot \frac{n}{2} \cdot \log \frac{n}{2}$$

Induktionsschritt: $\frac{n}{2} \rightsquigarrow n$

$$\begin{aligned} T(n) &= 2 \cdot T\left(\frac{n}{2}\right) + d \cdot n \\ &\leq 2 \cdot \left(c \cdot \frac{n}{2} \cdot \log\left(\frac{n}{2}\right)\right) + d \cdot n \\ &= c \cdot n \cdot \log \frac{n}{2} + d \cdot n \\ &= c \cdot n \log n \underbrace{- cn + d \cdot n}_{\leq 0,\ \text{da } c \geq d} \\ &\leq c \cdot n \log n \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad T(n) \in O(n \log n)$$