01.12.09

Beweis: Übung!

Für BFS zeigen wir, dass der zugehörige Baum tatsächlich kürzeste Wege im Graphen liefert. Für leichtere Argumentation gebrauchen wir dabei folgende leichte Modifikation von Algorithmus 3.7:

Algorithmus 3.17

Input: Graph $G = (V, E)$, Knoten s

Output:
- Knotenmenge $R \subseteq V$, die von s aus erreichbar ist;
- für jeden Knoten $v \in R$ die Länge $d(s,v)$ eines kürzesten Weges von s nach v;
- eine Kantenmenge $T \subseteq E$, die die ~~Erreichbarkeit~~ kürzestmöglichen Wege zu den Knoten von R sicherstellt, d.h. einen die Zusammenhangskomponente von s aufspannenden Baum (R, T), der kürzeste Wege von s zu allen Knoten in R liefert.

(1) Sei $R := \{s\}$, $Q := \{s\}$, $T := \emptyset$, $\ell(s) := 0$,

(2) WHILE $(Q \neq \emptyset)$ DO {

wähle erstes Element $v \in Q$

(3) IF (es gibt kein $w \in V \setminus R$ mit $e = \{v, w\} \in E$ THEN

$Q := Q \setminus \{v\}$

(4) ELSE {

wähle ein $w \in V \setminus R$ mit $e = \{v, w\} \in E$;

setze $R := R \cup \{w\}$, $T := T \cup \{e\}$, hänge w an Q an;

setze $\ell(w) := \ell(v) + 1$.

}

}

(5) STOP

Satz 3.18

(i) Verfahren 3.17 ist ein Algorithmus.

(ii) Die Laufzeit ist $O(n+m)$.

(iii) Am Ende ist für jeden erreichbaren Knoten $v \in R$ die Länge eines kürzesten Weges von s nach v im Baum (R,T) durch $\ell(v)$ gegeben.

(iv) Am Ende ist für jeden erreichbaren Knoten $v \in R$ die Länge eines kürzesten Weges von s nach v im Graphen (V,E) durch $\ell(v)$ gegeben.

Beweis:

(i) Wie für Algorithmus 3.7 gelten alle Eigenschaften; zusätzlich ist für jeden Knoten $\cancel{w} \in Q$ per Induktion der Wert $\ell(v)$ tatsächlich definiert.

(ii) Die Laufzeit bleibt von Algorithmus 3.7 erhalten.

(iii) Sei $d_{(R,T)}(s,v)$ die Länge eines kürzesten Weges von s nach v in (R,T). Dann zeigt man ~~über~~ durch Induktion über $d_{(R,T)}(s,v)$, dass für alle Knoten $d_{(R,T)}(s,v) = \ell(v)$ gilt:

Induktionsanfang:

$d_{(R,T)}(s,v) = 0$ gilt genau für $v = s$,

und $\ell(s) = 0$. ($\ell(s)$ ist die Länge eines kürzesten Weges von s nach s)

Induktionsannahme:

Sei $d_{(R,T)}(s,v) = \ell(v)$ für alle

$v \in V$ mit $d_{(R,T)}(s,v) \leq k-1$. Knoten mit Entf $\leq$ $k-1$

Induktionsschritt: $k-1 \rightsquigarrow k$

Nur im fertigen konstruierten Baum.

Sei $w \in V$ ein Knoten mit

$d_{(R,T)}(s,w) = k$.

Dann gibt es im Baum (R,T) einen keine Kreise im Baum eindeutigen Weg von s zu w; sei v der Vorgänger von w in diesem Weg, also $\{v,w\} \in T$.

Nach Induktionsannahme gilt

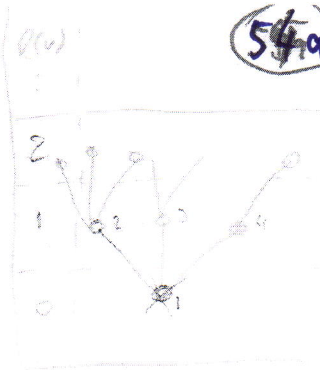
$d_{(R,T)}(s,v) = \ell(v)$; (da $d_{(R,T)}(s,v) \leq k-1$)

außerdem ist

$$d_{(R,T)}(s,w) = d_{(R,T)}(s,v) + 1$$

und $\ell(w) = \ell(v) + 1$, (in ④ gesetzt)

also $d_{(R,T)}(s,w) = \ell(w)$, und die Behauptung gilt.



(iv) Wir brauchen zunächst zwei Eigenschaften von Q.

(a) $\ell(v)$ wächst monoton mit der Aufnahme von v in die Warteschlange Q.

<u>Begründung</u>: Mit Induktion über die Anzahl der Kanten.

Die Aussage gelte für $Q: v_r\ v_{r+1} \dots v_k$ und v_k wurde gerade wg. $\{v_r, v_k\}$ aufgenommen, d.h. $\ell(v_r) \le \ell(v_{r+1}) \le \dots \le \ell(v_k)$.

Werden Knoten aus Q gelöscht, ändert dieses nichts an der Monotonie.

Also: $Q: v_i\ v_{i+1} \dots v_k$

Nun wird $\{v_i, v_{k+1}\}$ aufgenommen. $Q: v_i\ v_{i+1} \dots v_k\ v_{k+1}$

Dann gilt
$$\underset{(v_r,v_k)\in T}{\ell(v_k) = \ell(v_r)+1} \underset{\text{da vorher Monotonie galt}}{\le} \ell(v_i)+1 \underset{\text{In (4) gesetzt}}{=} \ell(v_{k+1}),$$
und damit weiterhin Monotonie in Q.

Damit haben wir sogar noch mehr gezeigt:

$$Q: \quad v_i \quad v_{i+1} \quad \dots \quad v_k \quad v_{k+1}$$

$$\ell(v_i) \le \quad \dots \quad \le \ell(v_{k+1}) = \ell(v_i)+1.$$

d.h.,

die Längen $\ell(v)$ der Knoten in Q unterscheiden sich um höchstens 1.

Wegen der Monotonie gilt $\ell(v_i)+1 \ge \ell(w)$ für $w \in R$ (evtl. w nicht mehr in Q)

Damit gilt,

(b) , dass bei der Auswahl eines Knotens $v \in Q$ in Schritt (2) es keinen Knoten $w \in R$ mit $\ell(w) > \ell(v)+1$ geben kann.

Jetzt nehmen wir an, am Ende des Algorithmus gibt es Knoten $w \in V$ mit

$$d(s,w) < d_{(R,T)}(s,w) = \ell(w).$$

Unter diesen Knoten betrachte einen mit minimalem Abstand von s in G mit dieser Eigenschaft.

Sei P ein kürzester s-w-Weg in G, und sei $e = \{v,w\}$ die letzte Kante in P,

d.h. $d(s,w) = d(s,v) + 1$.