

## Mathematische Methoden der Algorithmik

### Übung 4 vom 07.01.2009

Schriftliche Abgabe bis zum 21.01.09 in den Schrank vor der Abteilung *Algorithmik*.

#### Aufgabe 1 (Simplexverfahren):

Löse die folgenden lineare Programme mit Hilfe der 2-Phasen-Methode. Benutze dabei folgende Pivotregeln: als Pivotspalte wird jeweils die mit dem kleinsten negativen Kostenkoeffizienten gewählt; kommen zwei verschiedene Zeilen zum Pivotalisieren in Frage, dann wird die gewählt, die im Tabelau weiter oben steht.

$$\begin{array}{rcll}
 \min & x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & & \\
 \text{unter} & 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 1 \\
 & x_1 & - & x_2 & + & 4x_3 & = & 2 \\
 & 3x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & \leq & 5 \\
 & 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & \leq & 1 \\
 & x_1, & & x_2, & & x_3 & \geq & 0
 \end{array}$$

(20 Punkte)

#### Aufgabe 2 (Komplementärer Schlupf):

Gegeben sei das folgende lineare Programm (P):

$$\begin{array}{rcll}
 \max & 7x_1 & + & 6x_2 & + & 5x_3 & - & 2x_4 & + & 3x_5 & & \\
 \text{unter} & x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & - & 2x_4 & + & 2x_5 & \leq & 4 \\
 & 4x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & + & x_5 & \leq & 3 \\
 & 2x_1 & + & 4x_2 & + & 4x_3 & - & 2x_4 & + & 5x_5 & \leq & 5 \\
 & 3x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & - & 2x_5 & \leq & 1 \\
 & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4, & & x_5, & \geq & 0
 \end{array}$$

(a) Formuliere das duale Problem zu (P).

(b) Formuliere die Bedingungen für komplementären Schlupf zu (P).

- (c) Prüfe mit Hilfe des Satzes vom komplementären Schlupf, ob  $x^* = (0, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{3}, 0)^T$  eine optimale Lösung von (P) ist. (Hinweis: Auch wenn man  $y$  nicht kennt, kann man Bedingungen herleiten, die ein  $y$  erfüllen muss, und dann konkrete Dinge berechnen.)

(Hinweis: Der komplementäre Schlupf wird in der Vorlesung am 13.01.09 besprochen.)  
(5+5+10 Punkte)

### Aufgabe 3 (CPLEX):

Gegeben sei das folgende lineare Programm:

$$\begin{array}{rllll} \max & x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 \\ \text{unter} & x_1 & + & 4x_2 & - & 2x_3 & + & 2x_4 & \leq & 6 \\ & 2x_1 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & \leq & 8 \\ & 2x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & \leq & 7 \\ & x_1 & + & 4x_2 & + & 4x_3 & + & 2x_4 & \leq & 9 \\ & & & x_1, x_2, & x_3, & x_4 & & & \geq & 0 \end{array}$$

- Löse das lineare Programm mit Hilfe von CPLEX. Gib die Optimallösung, die Werte der Dualvariablen, die reduzierten Kosten und die Werte der Schlupfvariablen an.
- Ersetze im LP die Bedingung  $x_1, \dots, x_4 \geq 0$  durch  $x_1, \dots, x_4 \in \mathbb{Z}$  und löse das IP. Welche Lösung (Werte der Variablen, Zielfunktionswert) erhältst Du?
- Ersetze im LP die Bedingung  $x_1, \dots, x_4 \geq 0$  durch  $x_1, \dots, x_4 \in \{0, 1\}$  und löse das IP. Welche Lösung erhältst Du?
- Ersetze alle  $\leq$  durch  $=$  bzw.  $\geq$  und löse jeweils das lineare Programm. Welche Ergebnisse erhältst Du?

(Tipp: Unter

<http://www.ibr.cs.tu-bs.de/courses/ws0809/mma/ueb/readme/usrcplex.pdf> und <http://www.ibr.cs.tu-bs.de/courses/ws0809/mma/ueb/readme/filesplex.pdf> findet man ausführliche CPLEX Manuals.)

(8+4+4+4 Punkte)