Abteilung Algorithmik
Institut für Betriebssysteme und Rechnerverbund **WS 08/09**
TU Braunschweig

Prof. Dr. Sándor Fekete
Nils Schweer

Mathematische Methoden der Algorithmik
Übung 1 vom 12.11.2008

Schriftliche Abgabe bis zum 26.11. in den Schrank vor der Abteilung *Algorithmik*.

Aufgabe 1 (Vertex Cover und Matching):

Sei $G = (V, E)$ ein Graph, VC_{opt} ein optimales Vertex Cover und M_{opt} ein optimales Matching in G.

a) Zeige: $|VC_{opt}| \leq 2 \cdot |M_{opt}|$.

b) Gib eine Klasse von Graphen an, für die $|VC_{opt}|$ beliebig groß wird und die Ungleichung aus a) immer mit Gleichheit erfüllt ist.

(10+10 Punkte)

Aufgabe 2 (Ein lineares Optimierungsproblem):

Ein Whisky-Importeur unterhält zwar einen unbegrenzten Markt für seine Ware, aber durch Importbeschränkungen werden seine monatlichen Einkaufsmengen folgendermaßen begrenzt:

Sir Roses	höchstens 2000 Flaschen zu 35 EUR,
Highland Wind	höchstens 2500 Flaschen zu 25 EUR,
Old Frenzy	höchstens 1200 Flaschen zu 20 EUR.

Daraus stellt er drei Mischungen A, B und C her, die er zu 34 EUR, 28.50 EUR, bzw. 22.50 EUR pro Flasche verkauft. Die Zusammensetzung der Mischungen ist:

A	wenigstens	60%	*Sir Roses*
	höchstens	20%	*Old Frenzy*
B	wenigstens	15%	*Sir Roses*
	höchstens	60%	*Old Frenzy*
C	höchstens	50%	*Old Frenzy*

Wie sollten die Mischungen aussehen und wieviel sollte von jeder Mischung hergestellt werden, um einen maximalen Gewinn zu erzielen? Formuliere dieses Problem als lineares Programm. (Das Problem muss *nicht* gelöst werden!)

(15 Punkte)

Aufgabe 3 (Independent Set und Edge Cover):

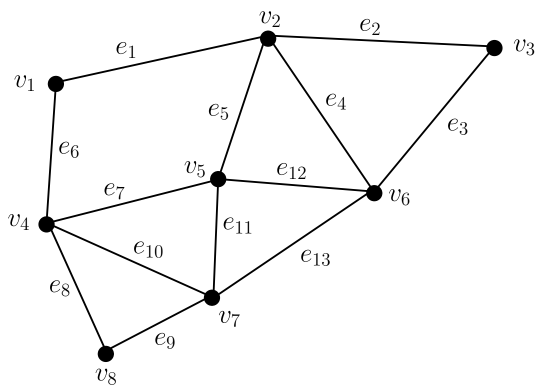

Abbildung 1: Ein Graph.

a) Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Beim Maximum-Independent-Set-Problem wird eine kardinalitätsmaximale Menge von Knoten gesucht, die paarweise nicht adjazent sind. Anders formuliert: Für jede Kante darf höchstens ein Knoten in die Menge aufgenommen werden. Formuliere das Maximum-Independent-Set-Problem als ganzzahliges (lineares) Programm, IP_{IS}.

b) Beim Minimum-Edge-Cover-Problem in einem Graphen $G = (V, E)$ wird eine kardinalitätsminimale Menge von Kanten gesucht, so dass jeder Knoten zu mindestens einer ausgewählten Kante inzident ist. $|EC|$ bezeichne die Größe einer optimalen Lösung für dieses Problem und $|IS|$ die Größe einer optimalen Lösung für das Maximum-Independent-Set-Problem. Zeige, dass für jeden Graphen

$$|EC| \geq |IS|$$

gilt.

c) Das Minimum-Edge-Cover-Problem kann wie folgt als ganzzahliges (lineares) Programm, IP_{EC}, formuliert werden:

$$\begin{array}{llll} \min & \sum_{e \in E} x_e & & \\ & \sum_{e \in \delta(v)} x_e & \geq 1 & \forall\, v \in V \\ & x_e \in \{0,1\} & & \forall\, e \in E \end{array}$$

Finde eine optimale Lösung für IP_{EC} und IP_{IS} für den Graphen aus Abb. 1.

d) Formuliere die beiden zugehörigen linearen Programme LP_{EC} und LP_{IS}. Sei $|EC_{LP}|$ die Größe einer optimalen Lösung für das lineare Programm LP_{EC}; $|IS_{LP}|$ ist analog definiert. Gib einen Graphen an, für den

$$|IS| < |IS_{LP}| = |EC_{LP}| < |EC|$$

gilt.

(10 + 4 + 4 + 7 Punkte)