

1. Aufgabe: Graphen

10+5+5 Punkte

- a) Zeige: Ein vollständiger Graph mit n Knoten hat $\frac{n(n-1)}{2}$ Kanten.
- b) Gib einen zusammenhängenden Graphen mit 5 Knoten an, der genau einen Hamiltonpfad und genau einen Eulerweg hat, die beide gleich sind.
(Hinweis: Angabe des Graphen und Markierung des Pfades / Weges reicht, sonst ist kein Beweis nötig!)
- c) Gibt es einen zusammenhängenden Graphen mit 5 Knoten, der genau zwei ungerade Knoten hat, aber keinen Hamiltonpfad?
(Hinweis: Falls ja, so reicht als Begründung die Angabe eines derartigen Graphen; falls nein, bitte eine einfache Begründung!)

2. Aufgabe: Datenstrukturen

10+5 Punkte

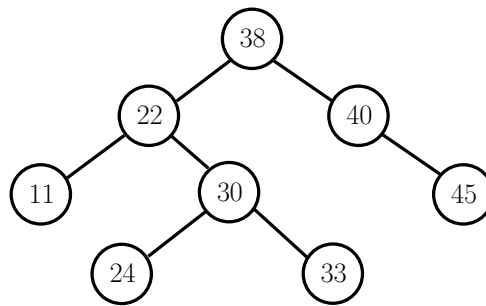


Abbildung 1: Der AVL-Baum T.

- a) Gegeben sei der AVL-Baum T aus Abbildung 1. Füge nacheinander die Elemente 39 und 36 ein, so dass T ein AVL-Baum bleibt; gib den Baum nach jeder Einfüge-Operation an.
(Hinweis: Nach *jedem* Einfügen soll der geänderte Baum ein AVL-Baum sein. Zum Schluss sollen beide Zahlen eingefügt sein.)
- b) Wie lange dauert die Suche nach einem Element x im Worst Case in den folgenden Datenstrukturen mit jeweils n Elementen: einfach verkettete Liste, binärer Suchbaum, AVL-Baum.
(Hinweis: Gib deine Aussagen in O -Notation an und skizziere den Worst Case. Trage dabei insbesondere die Position des Elementes x ein.)

3.Aufgabe: Komplexität

5+5+10 Punkte

a) Wir betrachten folgenden Algorithmus:

```
for  $i \leftarrow 2$  to  $n - 4$  do
  for  $j \leftarrow 1$  to  $3 \cdot i + 7$  do
    for  $k \leftarrow 5$  to  $7$  do
      |  $\langle a \rangle$ 
    end
  end
end
end
```

$T(n)$ bezeichne die Anzahl der Ausführungen von $\langle a \rangle$.

Gib $T(n)$ in Θ -Notation an (dazu brauchst Du die Konstanten aus der Definition nicht explizit zu berechnen).

b) Seien $f, g : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}$ zwei Funktionen. Zeige:

$$f \in \Theta(g) \Leftrightarrow g \in \Theta(f)$$

c) Zeige: $2n^4 + 6 \in O(n^7)$. Gib dazu explizit geeignete Konstanten c und n_0 aus der Definition an und zeige, dass sie die Definition erfüllen.

4.Aufgabe: Rekursionen

5+5 Punkte

a) Bestimme mit Hilfe des Mastertheorems das asymptotische Wachstum der Rekursion

$$T(n) = 256 \cdot T\left(\frac{n}{4}\right) + n^3.$$

b) Bestimme mit Hilfe des Mastertheorems das asymptotische Wachstum der Rekursion

$$T(n) = 27 \cdot T\left(\frac{n}{3}\right) + n^3.$$

5.Aufgabe: Hashing

10 Punkte

Wir betrachten ein leeres Array A der Größe 12, d.h. es gibt die Speicherzellen $A[0], A[1], \dots, A[11]$; in diesem führen wir offenes Hashing mit linearem Sondieren mit der folgenden Sondierungsfunktion durch:

$$t(i, x) = (x + i) \bmod 12$$

(also eine vereinfachte Kurzform von $t(i, h(x)) = (h(x) + i) \bmod 12$ mit $h(x) = x \bmod 12$). Dabei ist x ein einzusetzender Schlüssel und i die Nummer des Versuches, x in eine unbesetzte Speicherzelle des Arrays zu schreiben.

Gib zu jedem der folgenden Schlüssel die Position an, die er in A bekommt:

17, 41, 6, 5, 18

Gib außerdem das Array nach dem Einfügen aller Schlüssel an.

(Hinweis: Die Schlüssel sollen in der gegebenen Reihenfolge eingefügt werden.)

6.Aufgabe: Sortieren

15 Punkte

Gegeben sei das folgende Array A :

$$A[1] = 7 \quad A[2] = 6 \quad A[3] = 2 \quad A[4] = 5$$

Wende Quicksort auf das Array A an. Wähle dabei das gleiche Referenzelement wie in der Vorlesung (das letzte) und gib die Aufrufe der Funktionen *Partition* und *Quicksort* in zeitlicher Abfolge mit den jeweiligen Parametern an. Gib außerdem das Array am Ende jedes Aufrufes von *Partition* an.

7.Aufgabe: Suche in Graphen

2+2+2+2+2 Punkte

- a) Die Tiefensuche liefert kürzeste Wege in Graphen. wahr
 falsch
- b) Die Tiefensuche verwendet einen Stapel. wahr
 falsch
- c) Die Breitensuche verwendet eine Warteschlange. wahr
 falsch
- d) Die Breitensuche hat die gleiche Laufzeit wie die Tiefensuche (im Worst Case, in asymptotischer Notation). wahr
 falsch
- e) Die Breitensuche hat Laufzeit $O(n)$ für einen Graphen mit n Knoten und m Kanten. wahr
 falsch

Viel Erfolg!!!