Abteilung Algorithmik
Institut für Betriebssysteme und Rechnerverbund **WS 07/08**
TU Braunschweig

Prof. Dr. Sándor Fekete
Nils Schweer

Algorithmen und Datenstrukturen
Übung 5 vom 09.01.2008

Abgabe der Lösungen am Mittwoch, den 22.01.08, **vor (!!)** der Vorlesung im PK 15.1.
Bitte die Blätter vorne deutlich mit eigenem Namen und Gruppennummer versehen!

Aufgabe 1 (AVL-Bäume):

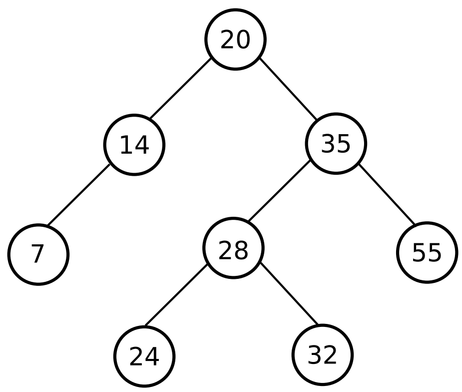

Abbildung 1: Der AVL-Baum T.

In den nachfolgenden Teilaufaufgaben sollen verschiedene Operationen auf den AVL-Baum T (vgl. Abbildung 1) angewendet werden. Dabei soll jede Teilaufgabe mit T starten. Die Operationen sollen so ausgeführt werden, dass der geänderte Baum wieder ein AVL-Baum ist.

a) Insert(23);

b) Insert(31);

c) Delete(24); Delete(32), Insert(50); Insert(60); Insert(52);

d) Delete(24); Delete(32), Insert(50); Insert(60); Insert(56);

Gib jeweils das Endergebnis an.

(4+4+4+4 Punkte)

Aufgabe 2 (Physikalisches Sortieren):
Wir betrachten einen Bereich L in dem Blöcke mit den Größen 2 und 3 liegen (vgl. Abbildung 2) und in dem es einen freien Bereich F der Größe 3 gibt. Die Blöcke sollen nun durch Umplatzieren sortiert werden. Wir bezeichnen die Blöcke von links nach rechts mit $B_1, \ldots, B_n$ und ihre Größen mit $|B_1|, \ldots, |B_n|$. Ein Block B_i, der aktuell den Teilbereich L_{B_i} von L belegt, darf auf den Teilbereich L_{Ziel} von L platziert werden, wenn folgendes erfüllt ist:

1.) L_{Ziel} ist leer.

2.) $L_{Ziel} \geq |B_i|$.

3.) L_{B_i} und L_{Ziel} sind disjunkt.

Das Umplatzieren eines Blockes zählt als ein Schritt.

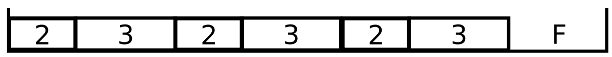

Abbildung 2: Der Bereich L.

a) Sortiere die Blöcke aus Abbildung 2 mit möglichst wenig Schritten (von links nach rechts nach aufsteigender Größe), so dass der Freiraum nach der Sortierung wieder an der gleichen Stelle wie zu Beginn ist (bezeichne die Anzahl der Schritte mit S).

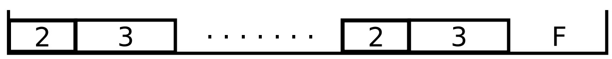

Abbildung 3: Der Bereich L.

b) Nun betrachten wir einen Streifen L, in dem $\frac{n}{2}$ Blöcke der Größe 2 und $\frac{n}{2}$ Blöcke der Größe 3 immer abwechselnd (beginnend mit einem Block der Größe 2) angeordnet sind; außerdem gibt es einen Freiraum der Größe 3 (vgl. Abbildung 3). Gib einen Algorithmus an, der die Blöcke mit $O(n^2)$ Schritten sortiert (von links nach rechts nach aufsteigender Größe) und dafür sorgt, dass der Freiraum wieder an der gleichen Stelle wie zu Beginn ist. Beschreibe kurz mit eigenen Worten die Vorgehensweise deines Algorithmuses und begründe die Anzahl der benötigten Schritte.

($10 - (S - 7) \cdot 2 + 10$ Punkte)

Aufgabe 3 (Fibonacci-Zahlen und Goldener Schnitt):

Im Jahre 1202 beschrieb Leonardo von Pisa (genannt Fibonacci, Sohn des Bonacci) in seinem Buch *Liber Abaci* das Wachstum einer Population von Kaninchen. Ein neugeborenes Paar Kaninchen braucht zwei Monate, um eigenen Nachwuchs zu produzieren. Wenn man also im ersten Monat mit einem Paar startet, dann ergibt sich die Rekursionsbeziehung

$$F_n = \begin{cases} 1 & \text{falls } n = 1, 2, \\ F_{n-1} + F_{n-2} & \text{falls } n \geq 3. \end{cases}$$

(a) Gib die ersten 20 Fibonacci-Zahlen an; bestimme jeweils $\frac{F_n}{F_{n-1}}$.

(b) Zeige durch Induktion:

$$F_n = \frac{(1 + \sqrt{5}\,)^n - (1 - \sqrt{5}\,)^n}{2^n \sqrt{5}}.$$

(c) Der sogenannte *Goldene Schnitt* ϕ ergibt sich daraus, dass man eine Strecke der Länge c so in zwei Teile $a \leq b$ teilt, dass $b/a = c/b = \phi$ gilt. Der Goldene Schnitt spielt in vielen Bereichen von Kunst und Ästhetik eine Rolle, hat aber auch seinen Platz in der Mathematik.

Zeige: ϕ erfüllt die Gleichung $\phi(\phi - 1) = 1$; bestimme die Lösung $\phi > 1$.

(2+6+6 Punkte)

Aufgabe 4 (Mergesort):

Sortiere die Sequenz $(10, 9, 23, 15, 8, 7, 7, 3)$ mit Hilfe von Mergesort. Gib die Zwischenschritte in geeigneter Form an. (Hinweis: Mergesort wird am 15.01.08 in der Vorlesung besprochen.)

(10 Punkte)