Abteilung Algorithmik
Institut für Betriebssysteme und Rechnerverbund **WS 07/08**
TU Braunschweig

Prof. Dr. Sándor Fekete
Nils Schweer

Algorithmen und Datenstrukturen
Übung 2 vom 07.11.2007

Abgabe der Lösungen am Mittwoch, den 28.11.07, **vor (!!)** der Vorlesung im PK 15.1.
Bitte die Blätter vorne deutlich mit eigenem Namen und Gruppennummer versehen!

Aufgabe 1 (Knotengrade):

a) Zeichne einen beliebigen Graphen mit mehr als 6 Knoten und mehr als 10 Kanten. Wie viele unterschiedliche Knotengrade gibt es in Deinem Graphen?

b) Konstruiere einen Graphen mit $n = 5$ Knoten und vier verschiedenen Knotengraden.

c) Sei $G = (V, E)$ ein einfacher Graph mit n Knoten und m Kanten; $\delta(v)$ bezeichne den Grad von Knoten v. Zeige:

   i) Wenn es einen Knoten $v \in V$ mit $\delta(v) = 0$ gibt, dann gibt es keinen Knoten $w \in V$ mit $\delta(w) = n - 1$.

   ii) Wenn es einen Knoten $v \in V$ mit $\delta(v) = n - 1$ gibt, dann gibt es keinen Knoten $w \in V$ mit $\delta(w) = 0$.

d) Folgere aus b): Wie viele unterschiedliche Knotengrade kann es in einem Graphen mit n Knoten höchstens geben? Gib die Anzahl in Ahängingkeit von n an.

e) Zeige: In einem einfachen Graphen gibt es mindestens zwei Knoten mit gleichem Grad. (Tipp: Verwende Teil d).)

(2+2+(4+4)+4+4 Punkte)

Aufgabe 2 (Hamiltonkreise und die Tait-Vermutung):

Ein „Hamiltonpfad“ besucht alle Knoten eines Graphen genau einmal; ein „Hamiltonkreis“ kehrt außerdem zum Anfangsknoten zurück. Der Name bezieht sich auf den irischen Astronomen Sir William Rowe Hamilton, der die Aufgabe stellte im Graphen in Abbildung 1 eine Rundreise zu finden; dieser Graph beschreibt die Ecken eines Polyeders, weshalb Hamilton auch von einer „Reise um die Welt“ sprach. 1886 stellte Peter Guthrie Tait die Vermutung auf, dass die Ecken jedes beliebigen Polyeders einen Hamiltonkreis zulassen, was Bill Tutte erst 1946 widerlegte; entscheidend dafür war der Graph in Abbildung 3, genannt „Tuttes Fragment“.

a) Finde einen Hamiltonkreis im Graphen in Abbildung 1 .

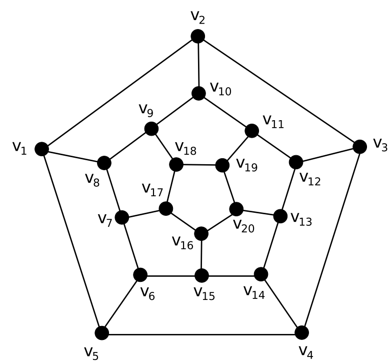

Abbildung 1: Finde einen Hamiltonkreis im Dodekaeder!

b) Zeige: Der Graph in Abbildung 2 hat keinen Hamiltonpfad.

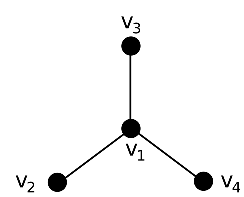

Abbildung 2: Ein Graph ohne Hamiltonpfad.

c) Zeige: In dem Graphen T in Abbildung 3 gibt es keinen Hamiltonpfad, der in v_1 beginnt und in v_8 endet.

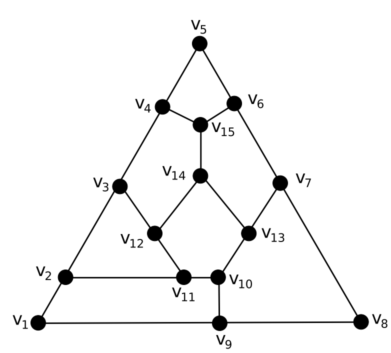

Abbildung 3: Dieser Graph hat keinen Hamiltonpfad von v_1 nach v_8.

Anleitung: Zum Beweis muss man analysieren, wie mögliche Verbindungen aussehen könnten, indem man nach und nach Kanten zu einem möglichen Hamiltonpfad hinzufügt. Dabei unterscheidet man mögliche Fälle und setzt die folgenden Argumente ein:

(i) v_1 und v_8 haben in einem Hamiltonpfad jeweils genau einen Nachbarn.

(ii) Alle anderen Knoten haben in einem Hamiltonpfad jeweils genau zwei Nachbarn.

(iii) Eine Verbindung zwischen v_1 und v_8 darf man erst herstellen, wenn man unterwegs alle anderen Knoten eingesammelt hat.

Die Argumentation kann folgendermaßen aussehen, man verfolge das an einem Bild:

Fall 1: Angenommen, v_1 wäre mit v_9 verbunden.
Wegen (i) wäre dann v_2 nicht mit v_1 verbunden, also müsste wegen (ii) v_2 mit v_{11} und v_3 verbunden sein. Wegen (iii) dürfte v_8 nicht mit v_9 verbunden sein, müsste also wegen (i) mit v_7 verbunden sein. Wegen (ii) müsste v_9 mit v_{10} verbunden sein. Jetzt unterscheidet man

Fall 1a: Angenommen, v_{10} wäre mit v_{13} verbunden.
Dann wäre wegen (iii) v_{13} nicht mit v_7 verbunden, also wegen (ii) mit v_{14}; ebenfalls wegen (ii) müsste v_7 mit v_6 verbunden sein. Wegen (ii) wäre v_5 mit v_6 und v_4 verbunden. Wegen (ii) hat v_6 nur zwei Verbindungen, also wäre v_{15} nicht mit v_6 verbunden. v_{15} müsste wegen (ii) mit v_{14} und v_4 verbunden sein, was aber eine Verbindung von v_1 nach v_8 erzeugte, ohne dass v_{12} auf dem Pfad liegt; das stünde im Widerspruch zu (iii), also kann es keinen Pfad mit den beiden Annahmen geben.

Ebenso betrachtet man:
Fall 1b: v_{10} ist mit v_{11} verbunden.

Danach folgt:
Fall 2: v_8 ist mit v_9 verbunden.

Unterfälle:
Fall 2a: v_2 ist mit v_{11} verbunden.

Fall 2b: v_{10} ist mit v_{11} verbunden.

(4+4+12 Punkte)

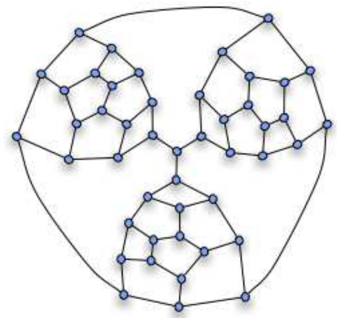

Abbildung 4: Dieser Graph hat keinen Hamiltonkreis.

Damit kann man die Tait-Vermutung widerlegen, was aber nicht mehr zur Aufgabe gehört. Abbildung 4 zeigt Tuttes Gegenbeispiel G: Es besteht aus drei verbundenen Kopien des Graphen T, sowie einem Extraknoten v_0 in der Mitte. Gäbe es nun in G einen Hamiltonkreis, dann könnte dieser nur zwei der drei Kopien von v_0 aus betreten, innerhalb der dritten müsste es einen Hamiltonpfad zwischen den v_1 und v_8 entsprechenden Knoten geben, was nach c) nicht sein kann.

Aufgabe 3 (Das Orakel von Kevin Bacon):

Dem *Orakel von Kevin Bacon* liegt der Schauspielergraph S zugrunde: Schauspieler sind durch Knoten repräsentiert. Zwei Schauspielerknoten sind durch eine Kante verbunden, wenn sie gemeinsam in einem Film gespielt haben. Der Knoten von Kevin Bacon hat den Wert 0; die *Kevin-Bacon-Zahl* (KBZ) eines anderen Schauspielers ist die Länge eines kürzesten Weges im Schauspielgraphen S. (So hat etwa Tom Hanks die Kevin-Bacon-Zahl 1, da er mit ihm gemeinsam in der Raumkapsel *Apollo 13* gesessen hat.)
Das Orakel ist im Web verfügbar: `http://oracleofbacon.org`. Interessant sind dabei auch die verschiedenen Hilf- und Infoseiten. Die zugrundeliegenden Filmdaten sind der *Internet Movie Database* entnommen: `http://www.imdb.com/`
Jetzt die Fragen:

a) Beschreibe eine Strategie, mit der man auf jeden Fall einen Schauspieler möglichst hoher KBZ im Graphen S finden kann, auch wenn man noch nie etwas von Hollywood gehört oder gesehen hat.

b) Finde einen Knoten mit mindestens KBZ 4. (Früher wurde man mit mindestens KBZ 7 in die "Hall of Fame" aufgenommen; das ist Übungsteilnehmern bisher immer gelungen; leider werden dort keine Einträge mehr vorgenommen.)

(12+8 Punkte)