

Algorithmen und Datenstrukturen Übung 1 vom 31.10.2007

Abgabe der Lösungen am Mittwoch, den 14.11.07, vor der Vorlesung im PK 15.1.
Bitte die Blätter vorne deutlich mit eigenem Namen und Gruppennummer versehen!

Aufgabe 1 (Das Sieb des Eratosthenes):

Das *Sieb des Eratosthenes* ist ein Verfahren zur Bestimmung von Primzahlen. Die Vorgehensweise ist folgendermaßen:

- (1) Betrachte die Liste aller positiven ganzen Zahlen ab 2.
 - (2) Setze einen Zeiger auf die Zahl 2.
 - (3) Lösche alle echten Vielfachen der Zahl, auf die der Zeiger steht.
 - (4) Setze den Zeiger auf die nächste ungelöschte Zahl in der Liste.
 - (5) Fahre bei (3) fort.
- a) Zeige: Eine Primzahl wird nicht gelöscht.
 - b) Zeige: Jede zusammengesetzte Zahl wird irgendwann gelöscht.
 - c) Hat das Verfahren die Eigenschaften, die Donald Knuth an einen Algorithmus stellt? (Antwort mit Begründung!)
 - d) Modifiziere das Verfahren, so dass ein Algorithmus entsteht, der überprüft, ob eine gegebene positive ganze Zahl $z \geq 2$ eine Primzahl ist.
 - e) Prüfe mit Deinem Verfahren aus d), ob 257 eine Primzahl ist.

(4+4+2+8+2 Punkte)

Bitte wenden!

Aufgabe 2 (Eulerweg):

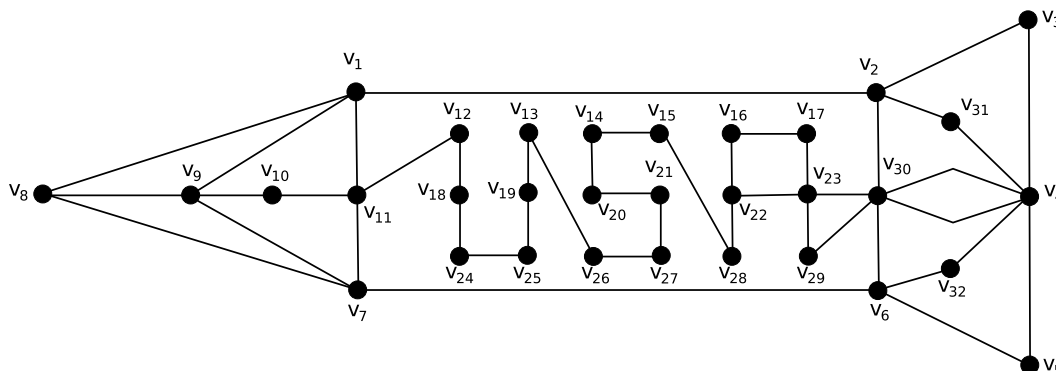


Abbildung 1: Euler auf dem Weg in den Weltraum!

Finde im Graphen in Abbildung 1 einen Eulerweg oder zeige, dass es keinen gibt.

(15 Punkte)

Aufgabe 3 (Graphen):

Wie in der Vorlesung beschrieben enthält jede Kante eines einfachen Graphen zwei Knoten. Darauf aufbauend bezeichnet man als *Grad eines Knotens* v die Anzahl der Kanten, die v enthalten. Der Grad eines Knotens v (englisch “degree”) wird mit $\delta(v)$ abgekürzt. Ein Graph heißt *vollständig*, wenn es zwischen je zwei Knoten eine Kante gibt, d. h. alle möglichen Verbindungen auch vorhanden sind.

- Zeichne einen beliebigen Graphen mit $n \geq 5$ Knoten v_1, \dots, v_n und $m \geq 10$ Kanten e_1, \dots, e_m . Überprüfe, ob $\sum_{i=1}^n \delta(v_i)$ eine gerade Zahl ist.
- Beweise, dass $\sum_{i=1}^n \delta(v_i)$ für *jeden* Graphen G mit n Knoten eine gerade Zahl ist.
- Zeichne einen beliebigen Graphen mit $n \geq 5$ Knoten v_1, \dots, v_n und $m \geq 10$ Kanten e_1, \dots, e_m . Überprüfe, ob $\sum_{i=1}^n \delta(v_i) = 2m$ gilt.
- Beweise, dass $\sum_{i=1}^n \delta(v_i) = 2m$ für *jeden* Graphen G mit n Knoten und m Kanten gilt.
- Sei H ein vollständiger Graph mit n Knoten. Zeige, dass für H die Zahl der Kanten genau $\frac{n}{2}(n - 1)$ beträgt.

(2+7+2+7+7 Punkte)