1.Aufgabe: Graphen **10+5+5 Punkte**

a) Zeige: Ein vollständiger Graph mit n Knoten hat $\frac{n(n-1)}{2}$ Kanten.

b) Gib einen zusammenhängenden Graphen mit 5 Knoten an, der genau einen Hamiltonpfad und genau einen Eulerweg hat, die beide gleich sind.

(Hinweis: Angabe des Graphen und Markierung des Pfades / Weges reicht, sonst ist kein Beweis nötig!)

c) Gibt es einen zusammenhängenden Graphen mit 5 Knoten, der genau zwei ungerade Knoten hat, aber keinen Hamiltonpfad?

(Hinweis: Falls ja, so reicht als Begründung die Angabe eines derartigen Graphen; falls nein, bitte eine einfache Begründung!)

2.Aufgabe: Datenstrukturen **10+5 Punkte**

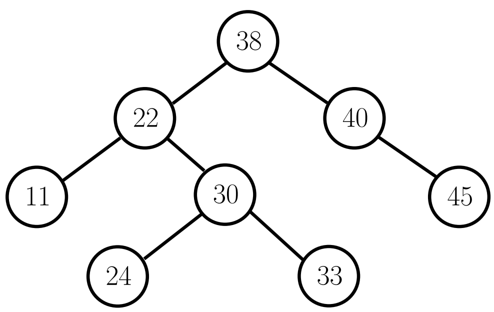

Abbildung 1: Der AVL-Baum T.

a) Gegeben sei der AVL-Baum T aus Abbildung 1. Füge nacheinander die Elemente 39 und 36 ein, so dass T ein AVL-Baum bleibt; gib den Baum nach jeder Einfüge-Operation an.

(Hinweis: Nach *jedem* Einfügen soll der geänderte Baum ein AVL-Baum sein. Zum Schluss sollen beide Zahlen eingefügt sein.)

b) Wie lange dauert die Suche nach einem Element x im Worst Case in den folgenden Datenstrukturen mit jeweils n Elementen: einfach verkettete Liste, binärer Suchbaum, AVL-Baum.

(Hinweis: Gib deine Aussagen in O-Notation an und skizziere den Worst Case. Trage dabei insbesondere die Position des Elementes x ein.)

3.Aufgabe: Komplexität **5+5+10 Punkte**

a) Wir betrachten folgenden Algorithmus:

for $i \leftarrow 2$ **to** $n - 4$ **do**
    for $j \leftarrow 1$ **to** $3 \cdot i + 7$ **do**
        for $k \leftarrow 5$ **to** 7 **do**
            <a>
        end
    end
end

$T(n)$ bezeichne die Anzahl der Ausführungen von <a>.

Gib T(n) in Θ-Notation an (dazu brauchst Du die Konstanten aus der Definition nicht explizit zu berechnen).

b) Seien $f, g : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}$ zwei Funktionen. Zeige:

$$f \in \Theta(g) \Leftrightarrow g \in \Theta(f)$$

c) Zeige: $2n^4+6 \in O(n^7)$. Gib dazu explizit geeignete Konstanten c und n_0 aus der Definition an und zeige, dass sie die Definition erfüllen.

4.Aufgabe: Rekursionen **5+5 Punkte**

a) Bestimme mit Hilfe des Mastertheorems das asymptotische Wachstum der Rekursion $T(n) = 256 \cdot T(\frac{n}{4}) + n^3$.

b) Bestimme mit Hilfe des Mastertheorems das asymptotische Wachstum der Rekursion $T(n) = 27 \cdot T(\frac{n}{3}) + n^3$.

5.Aufgabe: Hashing **10 Punkte**

Wir betrachten ein leeres Array A der Größe 12, d.h. es gibt die Speicherzellen $A[0], A[1], \ldots, A[11]$; in diesem führen wir offenes Hashing mit linearem Sondieren mit der folgenden Sondierungsfunktion durch:

$$t(i, x) = (x + i) \bmod 12$$

(also eine vereinfachte Kurzform von $t(i, h(x)) = (h(x) + i) \mod 12$ mit $h(x) = x \mod 12$). Dabei ist x ein einzusetzender Schlüssel und i die Nummer des Versuches, x in eine unbesetzte Speicherzelle des Arrays zu schreiben.
Gib zu jedem der folgenden Schlüssel die Position an, die er in A bekommt:

$$17, 41, 6, 5, 18$$

Gib außerdem das Array nach dem Einfügen aller Schlüssel an.
(Hinweis: Die Schlüssel sollen in der gegebenen Reihenfolge eingefügt werden.)

6.Aufgabe: Sortieren **15 Punkte**

Gegeben sei das folgende Array A:

$$A[1] = 7 \quad A[2] = 6 \quad A[3] = 2 \quad A[4] = 5$$

Wende Quicksort auf das Array A an. Wähle dabei das gleiche Referenzelement wie in der Vorlesung (das letzte) und gib die Aufrufe der Funktionen *Partition* und *Quicksort* in zeitlicher Abfolge mit den jeweiligen Parametern an. Gib außerdem das Array am Ende jedes Aufrufes von *Partition* an.

7.Aufgabe: Suche in Graphen **2+2+2+2+2 Punkte**

a)	Die Tiefensuche liefert kürzeste Wege in Graphen.	☐ wahr ☐ falsch
b)	Die Tiefensuche verwendet einen Stapel.	☐ wahr ☐ falsch
c)	Die Breitensuche verwendet eine Warteschlange.	☐ wahr ☐ falsch
d)	Die Breitensuche hat die gleiche Laufzeit wie die Tiefensuche (im Worst Case, in asymptotischer Notation).	☐ wahr ☐ falsch
e)	Die Breitensuche hat Laufzeit $O(n)$ für einen Graphen mit n Knoten und m Kanten.	☐ wahr ☐ falsch

Viel Erfolg!!!